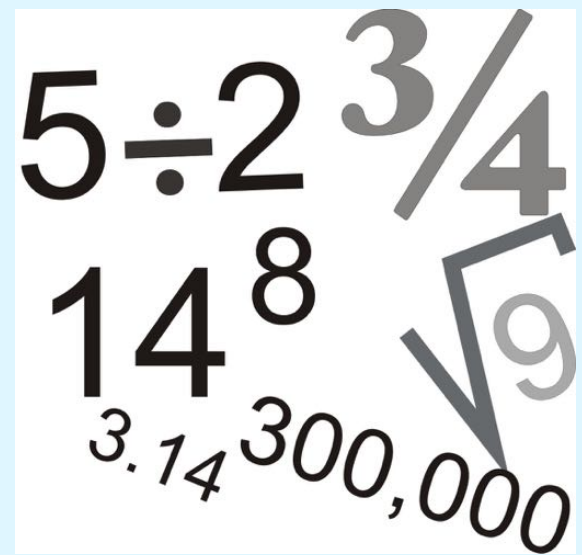
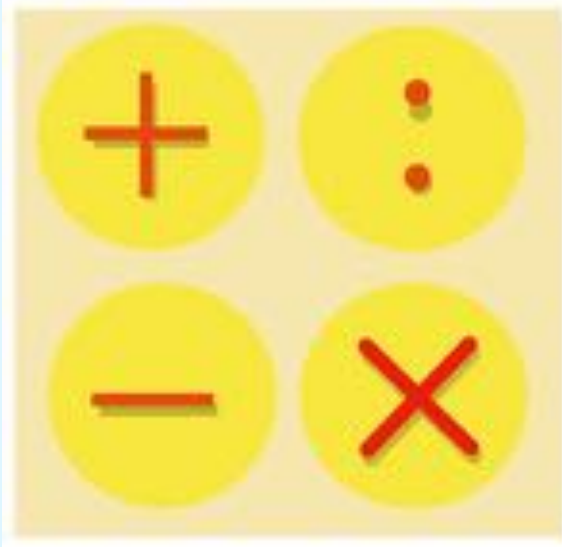


Costruire e classificare funzioni

Le 4 operazioni con i numeri

I primi passi nella matematica portano a 'inventare' i numeri e le quattro operazioni: addizione e sottrazione, moltiplicazione e divisione.

Sono passi suggeriti dalla realtà: contare, misurare, pagare merci, ...



Somma di funzioni nella realtà

La realtà suggerisce di applicare le quattro operazioni anche alle funzioni.

Ad esempio, incontro una somma di funzioni ogni volta che ascolto due suoni emessi contemporaneamente

Somma di funzioni

Addizione funzioni sinusoidali, con periodo e ampiezza opportuni.

Ottingo

Una funzione periodica

A partire dal 1930 elettricità ed elettronica per generare segnali sinusoidali

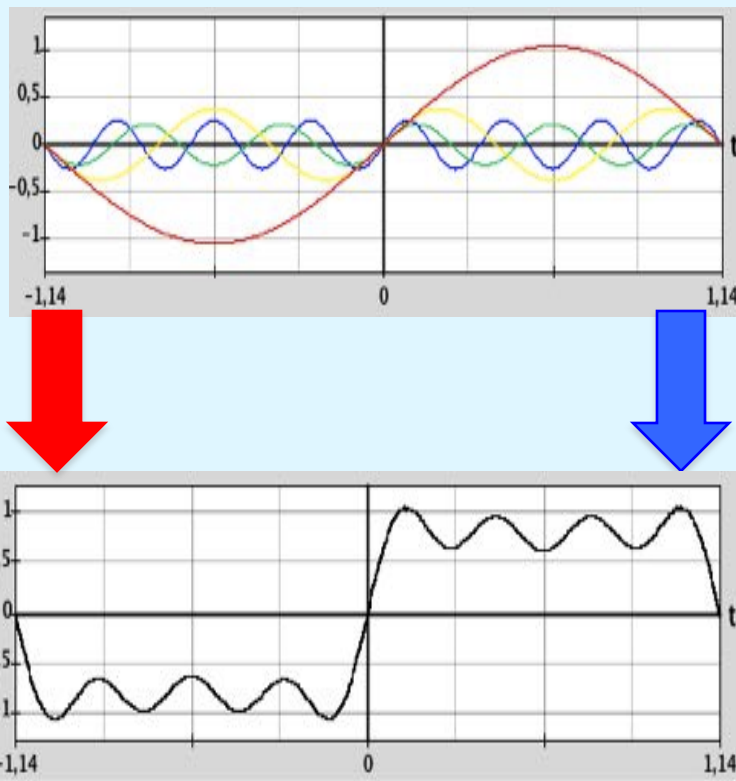
Organi Hammond, strumenti elettronici, ...

Sintesi additiva di suoni

Emetto, nello stesso momento, più suoni sinusoidali di periodo e ampiezza opportuni

Ottingo

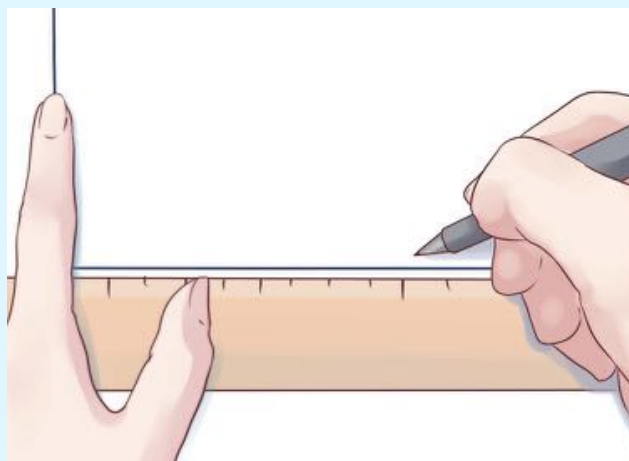
Un suono che imita uno strumento musicale.

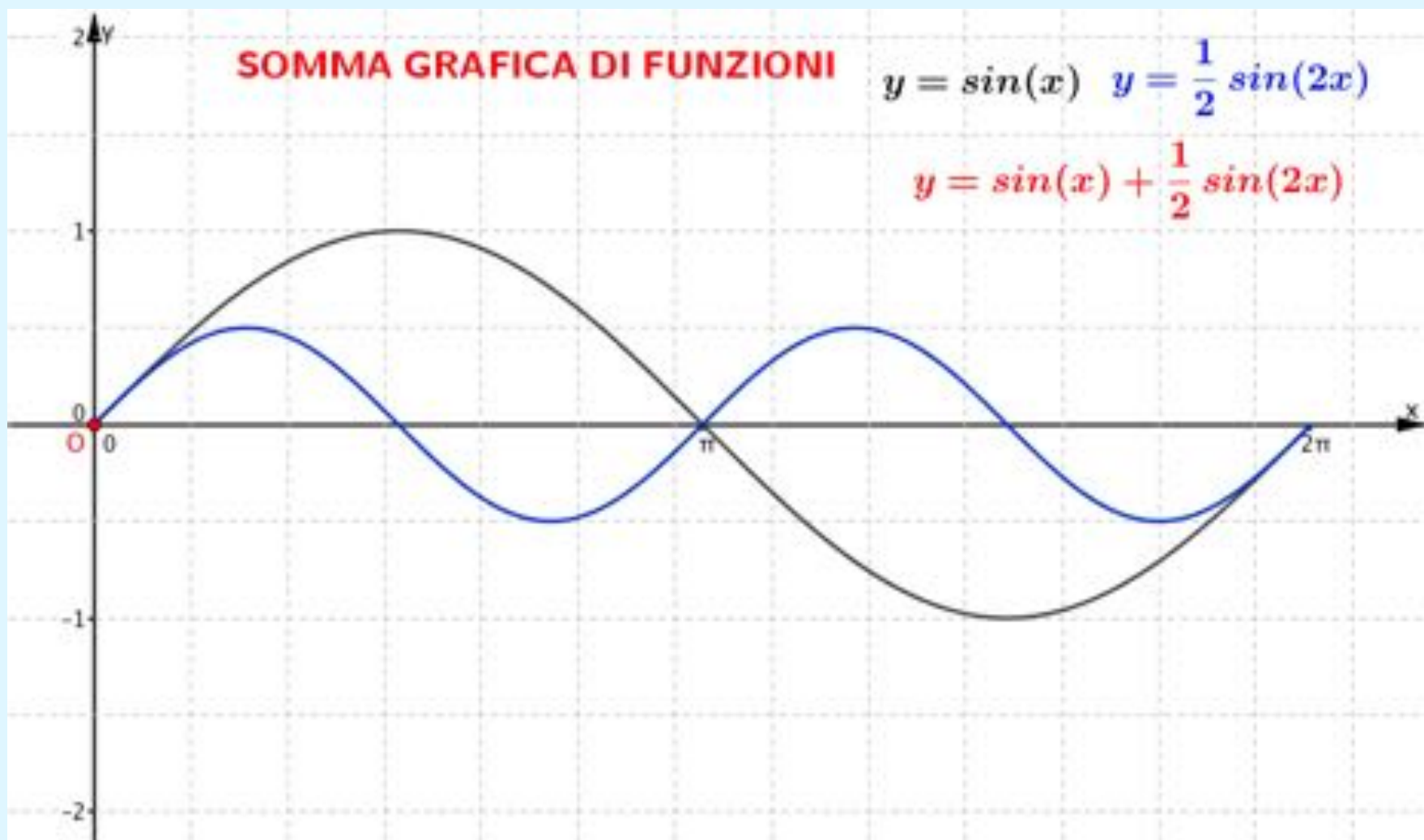


Un procedimento 'storico' per disegnare la somma di due funzioni

Fino agli anni '80 del secolo scorso, non erano diffusi personal computer e calcolatrici grafiche. Perciò si usava un metodo per tracciare 'a mano' il grafico della somma di due funzioni.

Il video seguente illustra, a partire da un esempio, il procedimento all'epoca spesso utilizzato.

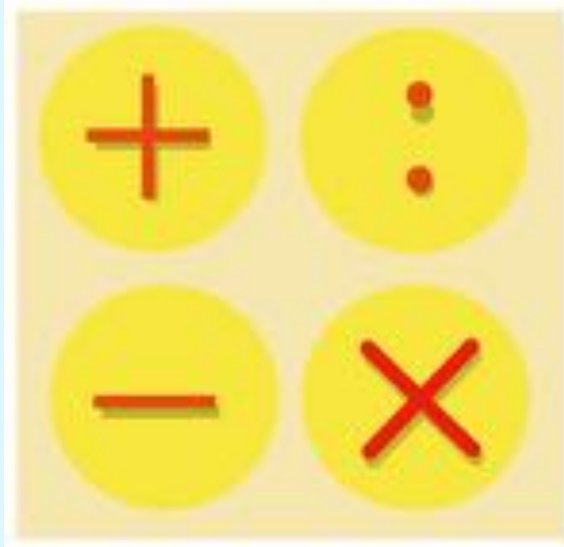




Le 4 operazioni con le funzioni

Ecco l'idea: applicare le quattro operazioni per costruire funzioni.

Così la matematica continua a crescere ...



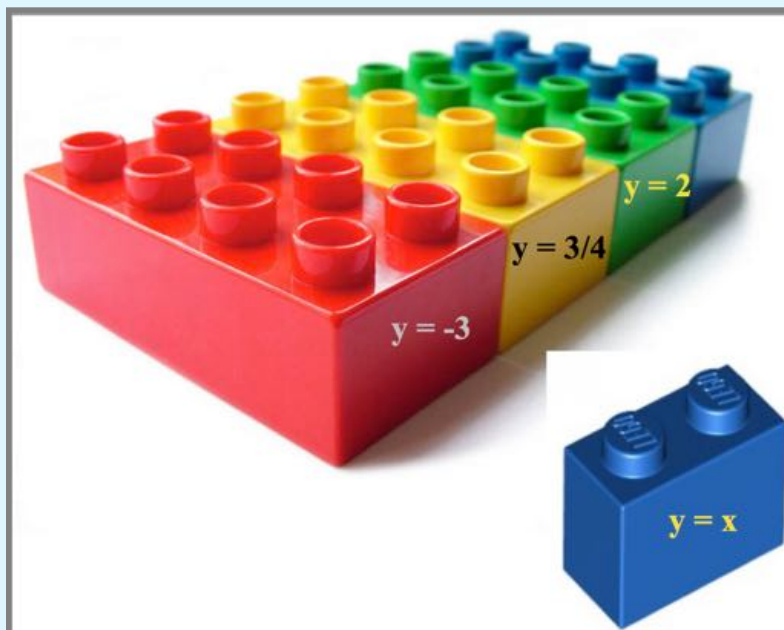
$$y = \frac{\sin(x)}{x^2}$$
$$y = x^2 \times e^x$$
$$y = e^x \cdot \sin(x)$$

Costruire funzioni

Posso costruire moltissime funzioni anche con pochi 'mattoni elementari'.

Comincio con due soli tipi di 'mattoni':

- le funzioni del tipo $y = k$ (con k numero reale):
- la funzione $y = x$.



Costruire funzioni con l'addizione

$$\boxed{y = x} + \boxed{y = 3} \longrightarrow y = x + 3$$

$$\boxed{y = x} + \boxed{y = -2} \longrightarrow y = x - 2$$

$$\boxed{y = x} + \boxed{y = \pi} \longrightarrow y = x + \pi$$

Costruire funzioni con la moltiplicazione

$$\boxed{y = x} \times \boxed{y = 3} \longrightarrow y = 3x$$

$$\boxed{y = x} \times \boxed{y = x} \longrightarrow y = x^2$$

$$\boxed{y = x^2} \times \boxed{y = x} \longrightarrow y = x^3$$

...

Costruire funzioni con addizione e moltiplicazione

$$\boxed{y = x^2} \times \boxed{y = 3} \longrightarrow y = 3x^2$$

$$\boxed{y = 3x^2} + \boxed{y = x - 2} \longrightarrow \boxed{y = 3x^2 + x - 2}$$

$$\boxed{y = x^3} + \boxed{y = 3x^2 + x - 2} \longrightarrow \boxed{y = x^3 + 3x^2 + x - 2}$$

POLINOMIO

Funzioni polinomiali

Si costruiscono a partire dalle funzioni $y=k$ e $y=x$ solo con ripetute addizioni e moltiplicazioni.
Sono tutte scritte con formule del tipo seguente:

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

dove

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ sono numeri reali detti *coefficienti*.
 n è un numero naturale detto *grado del polinomio*.

Un'osservazione

Posso sempre eseguire addizione e moltiplicazione fra numeri reali, perciò

**Il dominio delle funzioni polinomiali
è l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali**

Esempi di funzioni polinomiali

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$y = x^3 + 3x^2 + x - 2$$

Grado: $n = 3$

Coefficienti:

$$a_3 = 1, a_2 = 3, a_1 = 1, a_0 = -2$$

$$y = 3x - 2$$

Funzione lineare

Grado: $n = 1$

$$\text{Coefficienti: } a_1 = 3, a_0 = -2$$

$$y = x^2 + 3x - 2$$

Funzione quadratica

Grado: $n = 2$

$$\text{Coefficienti: } a_2 = 1, a_1 = 3, a_0 = -2$$

Costruire funzioni anche con la divisione

Ora parto dai polinomi e opero la divisione; ottengo *quozienti di polinomi*, cioè funzioni tutte scritte con formule del tipo seguente:

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

dove

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ e $b_m, a_{m-1}, \dots, b_2, b_1, b_0$ sono numeri reali detti *coefficienti*.

I quozienti di polinomi prendono anche il nome di *funzioni razionali fratte*

Esempi di funzioni razionali fratte

$$y = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

$$y = \frac{4x^2 - 2x + 5}{x^3 - 9x}$$

$$a_2 = 4, a_1 = -2, a_0 = 5 \\ b_3 = 1, b_2 = 0, b_1 = -9, b_0 = 0$$

$$y = \frac{x^3 + 3x - 1}{2x - 4}$$

$$a_3 = 1, a_2 = 0, a_1 = 3, a_0 = -1 \\ b_1 = 2, b_0 = -4$$

$$y = -\frac{3}{x}$$

$$a_0 = -3 \\ b_1 = 1, b_0 = 0$$

$$y = \frac{4}{3x^2}$$

$$a_0 = 4 \\ b_2 = 3, b_1 = b_0 = 0$$

Dominio di una funzione razionale fratta

Non posso dividere per 0; perciò debbo escludere dal dominio della funzione tutti i numeri per cui il denominatore vale 0

Esempi

$$y = \frac{4x^2 - 2x + 5}{x^3 - 9x}$$

**Denominatore $D = x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = 0$
per $x = 0$ o per $x = 3$ o per $x = -3$
Perciò dal dominio debbo escludere i
numeri 0, 3 e -3 .**

$$y = \frac{4}{3x^2}$$

**Denominatore $D = 3x^2 = 0$ per $x = 0$
Perciò dal dominio debbo escludere 0.**

Un'altra forma per scrivere funzioni razionali fratte

Esempi

$$y = -\frac{3}{x} \text{ [0 è escluso dal dominio]}$$



$$xy = -3 \Rightarrow xy + 3 = 0$$

Polinomio di 2° grado nelle
variabili x e y uguagliato a 0

$$y = \frac{4}{3x^2} \text{ [0 è escluso dal dominio]}$$



$$3x^2y = 4 \Rightarrow 3x^2y - 4 = 0$$

Polinomio di 3° grado nelle
variabili x e y uguagliato a 0

FUNZIONI ALGEBRICHE

**Funzioni che si possono scrivere nella forma di
un polinomio nelle variabili x, y uguagliato a zero**

Richiamo: monomi, polinomi e loro grado

		Grado
Lettera	$x = x^1$	1
	$x^2 = x^1 \cdot x^1$	$2 = 1 + 1$
	$y^3 = y^2 \cdot y^1$	$3 = 2 + 1$
Monomio	$3x^2 = 3x^1 \cdot x^1$	$1 + 1 = 2$
	$4xy = 4 x^1 \cdot y^1$	$1 + 1 = 2$
	$-5x^2y = -5 x^2 \cdot y^1$	$1 + 2 = 3$
	$\frac{2}{3}xyz = \frac{2}{3}x^1y^1z^1$	$1 + 1 + 1 = 3$

Grado di un polinomio

Grado: $3 + 2 = 5$

Grado: $2 + 1 = 3$

Grado: $1 + 1 = 2$

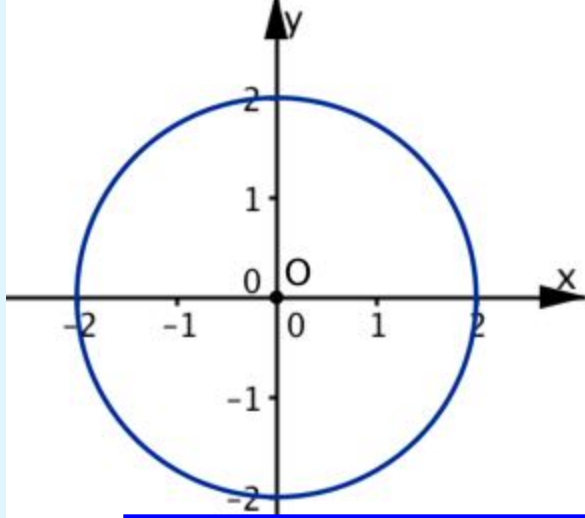
$$-3x^2y + 4x^3y^2 - 3xy$$

Monomi

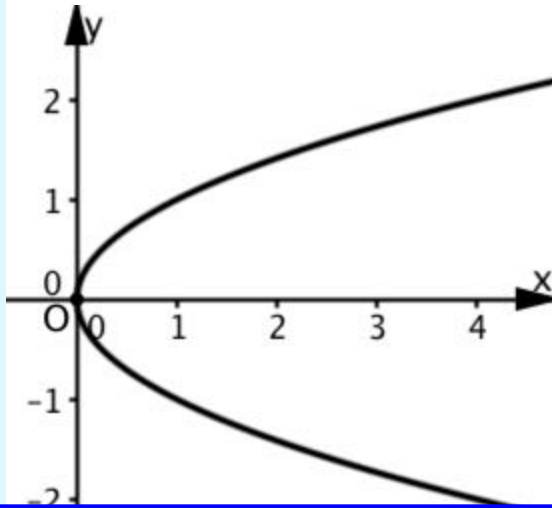
Curve algebriche

Osserviamo le formule ottenute 'con occhio matematico': ci ricordano analoghi polinomi già incontrati per descrivere curve. Ecco qualche esempio.

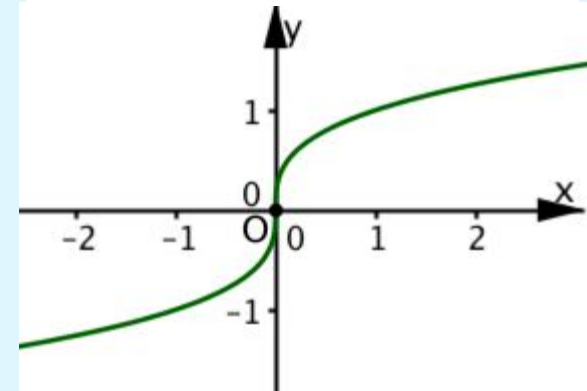
$$x^2 + y^2 = 4 \iff x^2 + y^2 - 4 = 0$$



$$x = y^2 \iff x - y^2 = 0$$



$$x = y^3 \iff x - y^3 = 0$$

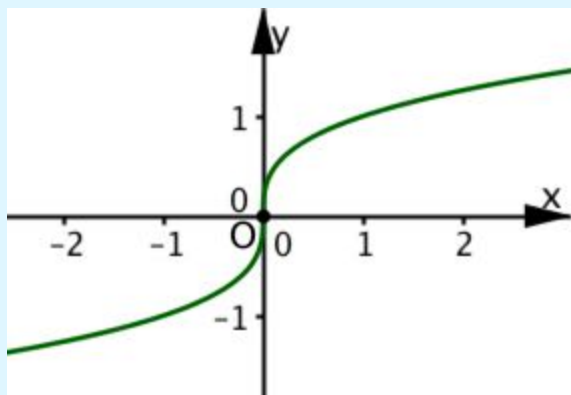


CURVE ALGEBRICHE

Curve che hanno come equazione un polinomio nelle variabili x e y uguagliato a 0.

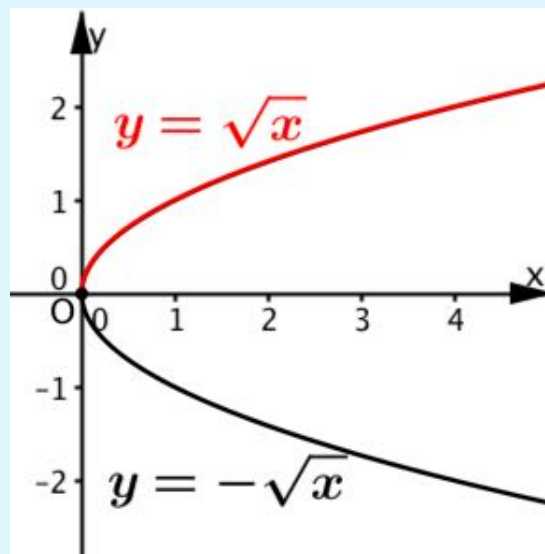
Curve algebriche e funzioni

Tutte le curve algebriche sono il grafico di una sola funzione? Rivediamo gli esempi per trovare la risposta.



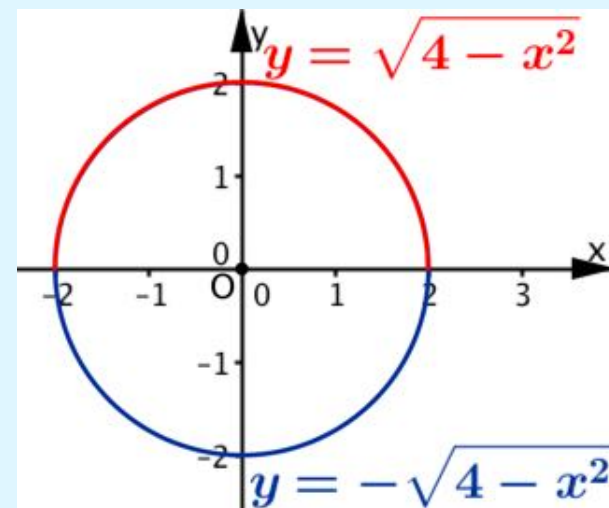
$$\begin{aligned}x - y^3 &= 0 \Rightarrow y^3 = x \\ \Downarrow \\ y &= \sqrt[3]{x}\end{aligned}$$

Una funzione



$$\begin{aligned}x - y^2 &= 0 \Rightarrow y^2 = x \\ \Downarrow \\ y &= -\sqrt{x} \quad y = \sqrt{x}\end{aligned}$$

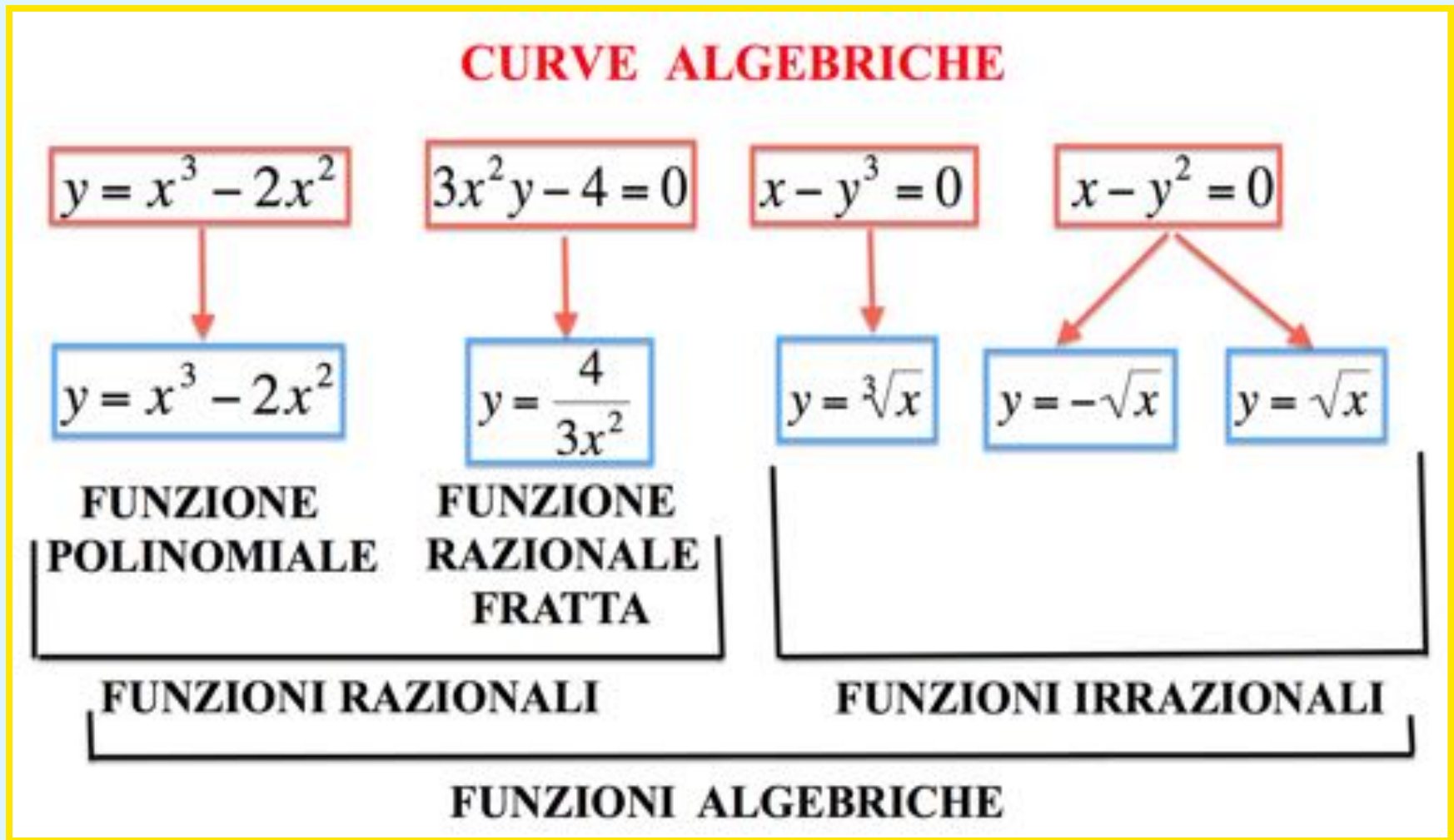
Due funzioni



$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 4 &= 0 \Rightarrow y^2 = 4 - x^2 \\ \Downarrow \\ y &= -\sqrt{4 - x^2} \quad y = \sqrt{4 - x^2}\end{aligned}$$

Due funzioni

Classificare curve e funzioni algebriche



Grado di una funzione

È importante ricordare che posso valutare il grado solo di un polinomio. Perciò, posso determinare il grado di una funzione algebrica solo se la scrivo sotto forma di un polinomio uguagliato a 0.

ESEMPI

Funzione algebrica	Scritta in forma di polinomio = 0	Grado
$y = x^3 + 2x^4 - 3x$	$2x^4 + x^3 - 3x + y = 0$	4
$y = \frac{3x^2 + 2}{x^3}$ con $x \neq 0$	$x^3y - 3x^2 - 2 = 0$	4
$y = \sqrt[3]{x+1}$	$y^3 - x - 1 = 0$	3
$y = \sqrt[3]{\frac{x^2 + 1}{x}}$	$xy^3 - x^2 - 1 = 0$	4

Funzioni algebriche o trascendenti

Osservo la scrittura delle funzioni algebriche

$$y = x^3 - 2x^2$$

$$y = \frac{4}{3x^2}$$

$$y = \sqrt[3]{x}$$

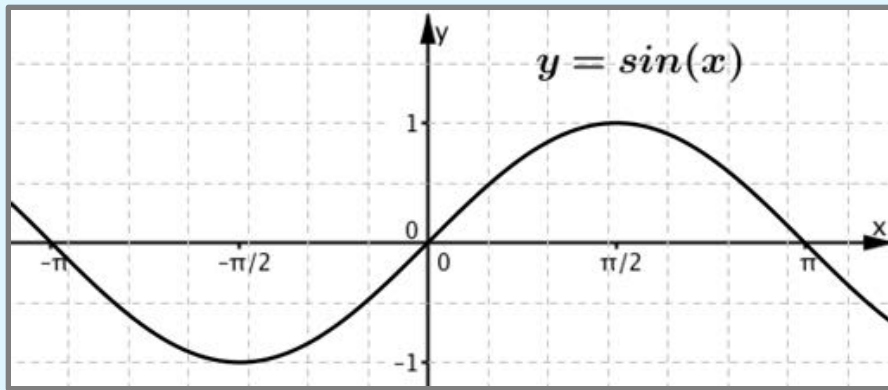
$$y = -\sqrt{x}$$

In tutte le funzioni *algebriche* trovo lo stesso procedimento per ottenere y a partire da x .

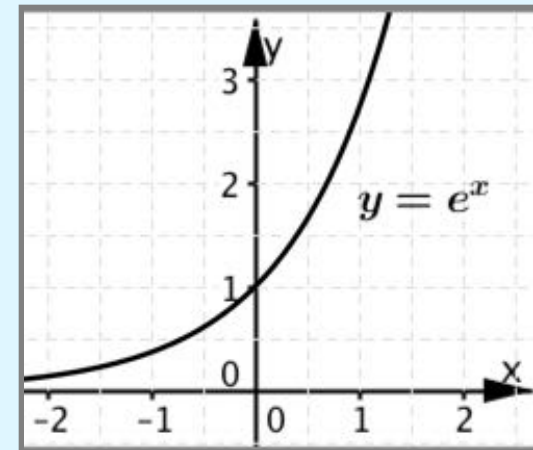
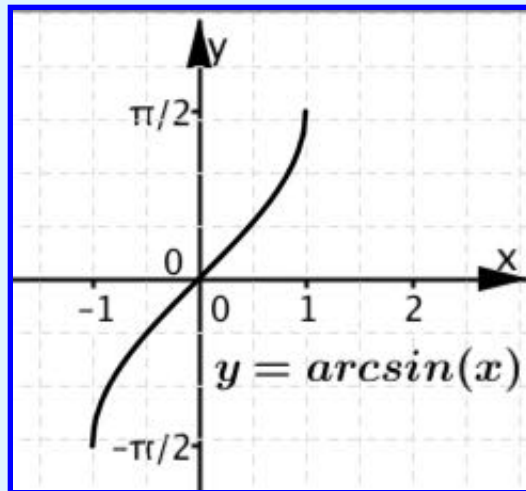
Opero su x solo con le *operazioni algebriche* e cioè: addizione e sottrazione, moltiplicazione e divisione, elevazione a potenza ed estrazione di radice

Funzione *trascendente* è una funzione NON algebrica: per ottenere y opero su x con un procedimento che ‘trascende’ (cioè va oltre) le operazioni algebriche.
Curva *trascendente* è una curva NON algebrica.

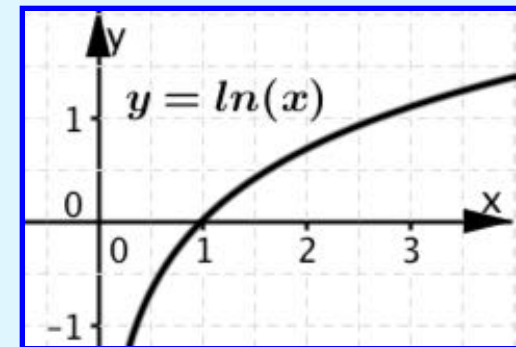
Funzioni trascendenti elementari



E la sua inversa



E la sua inversa



E tutte le funzioni che si ottengono da queste con le operazioni algebriche o la composizione di funzioni

Uno sguardo alla storia: curve 'famose'

Nella storia della matematica compaiono curve da almeno 2600 anni: la retta, il cerchio, le coniche e poi altre curve dalle proprietà così sorprendenti da legare il proprio nome al matematico che le aveva più studiate.

Un primo esempio di 'curva algebrica famosa'.

La cissoide di Diocle (2° secolo a. C.)

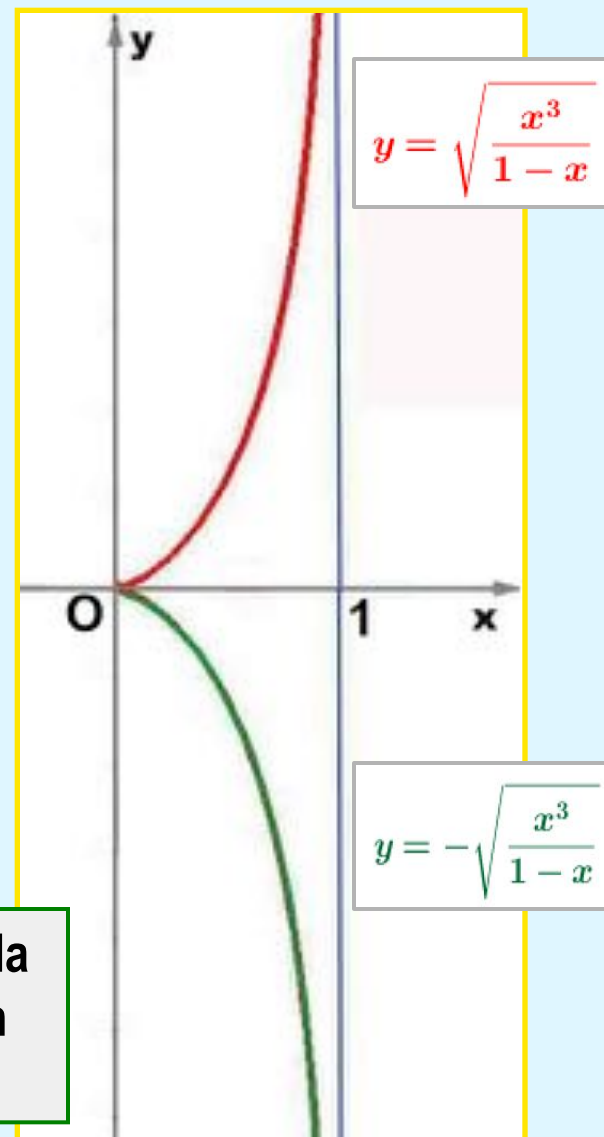
Equazione cartesiana (3° grado):

$$x^3 + xy^2 - y^2 = 0$$

da cui le due funzioni:

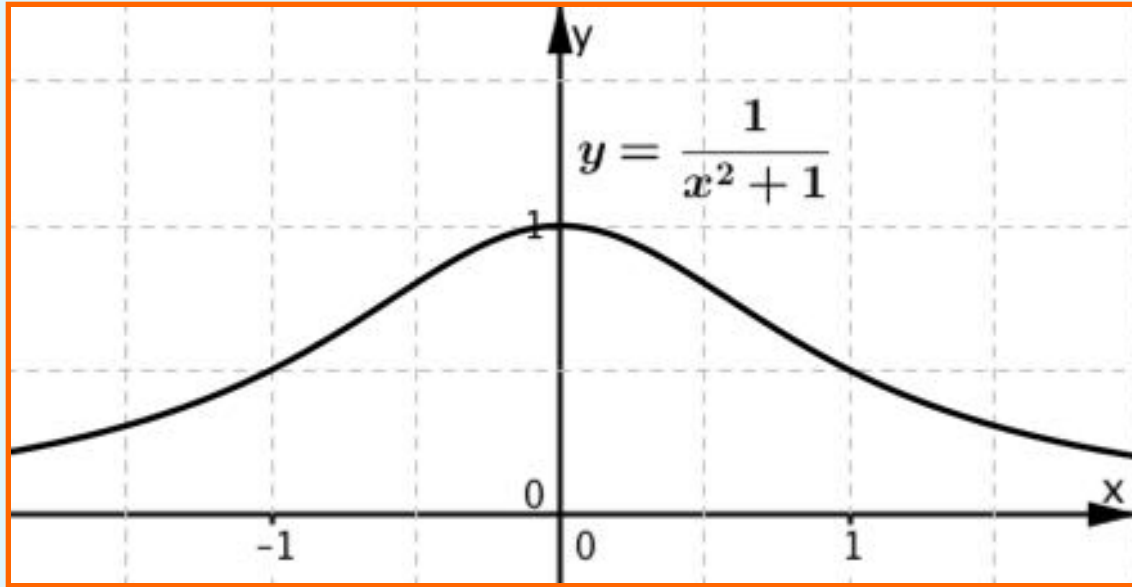
$$y = -\sqrt{\frac{x^3}{1-x}} \quad y = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$$

Studiata anche da Fermat e Newton nel XVII secolo.



Esempi di 'curve famose'

La versiera di Agnesi



Equazione cartesiana (3° grado):

$$x^2y + y - 1 = 0$$

da cui la funzione: $y = \frac{1}{1 + x^2}$

Daniela Valenti, 2020

Gaetana Agnesi
1718 - 1799



*Libro di testo
famoso in Europa*

Uno sguardo alla storia

Un esempio di 'curva trascendente famosa'

La catenaria

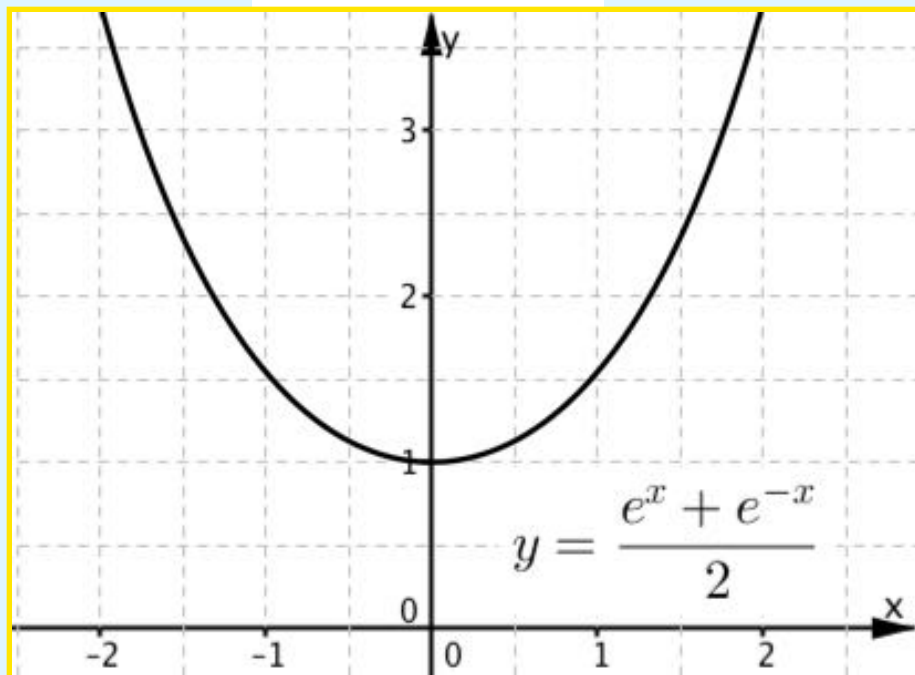


Grafico della funzione trascendente

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Una catena appesa agli estremi
si dispone lungo una catenaria



Non è una parabola, ma anche Galileo nel 1638 si è sbagliato!

Nel 1691 i Bernoulli, Leibniz e Huygens trovarono l'equazione della curva e Huygens scelse il nome.