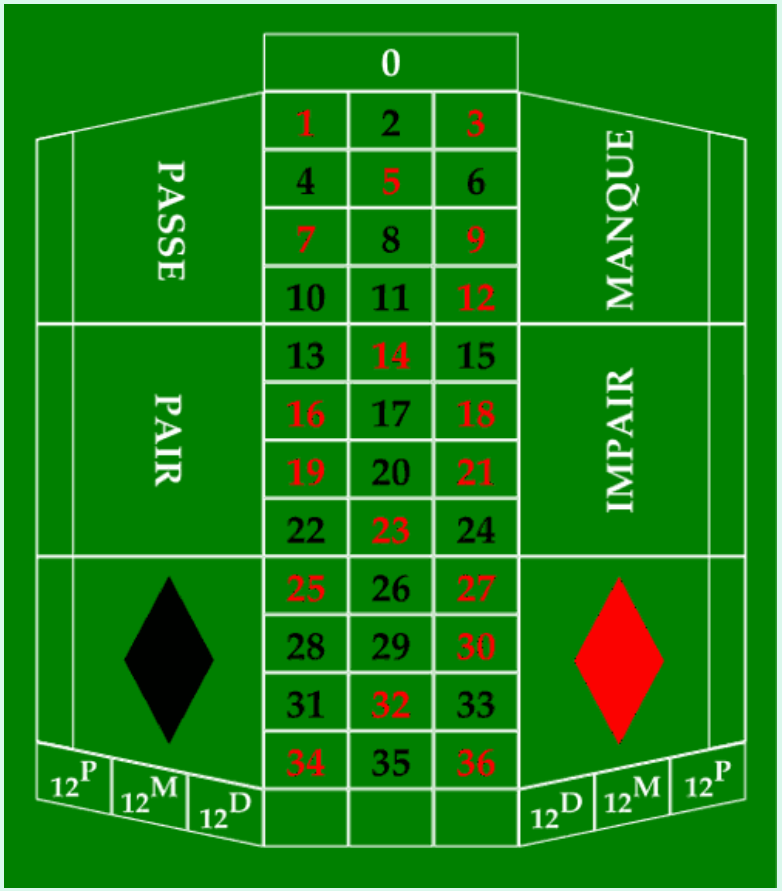
Probabilità totale

Daniela Valenti 2020



Richiamo la roulette

La roulette

L'organizzatore del gioco (il Banco) fa girare la pallina, che si ferma in una delle 37 vaschette segnate con i numeri da 0 a 36.

Prima che la pallina cominci a girare, ogni giocatore scommette sul numero che uscirà.

Molte scommesse sono possibili, ad esempio:

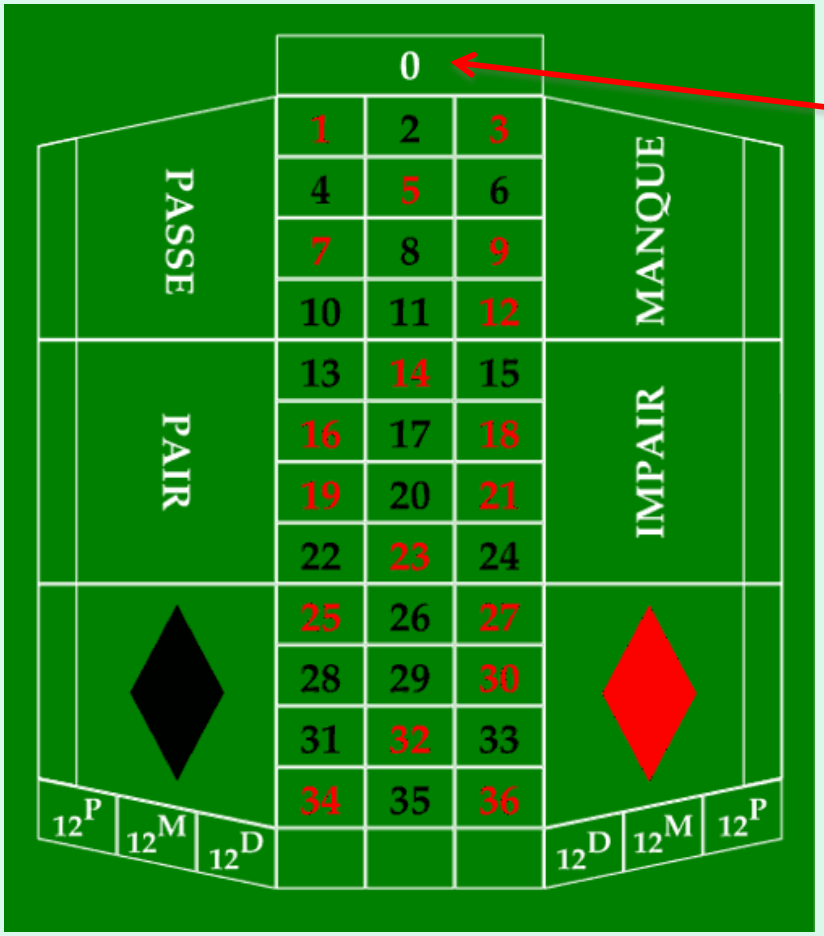
- 'indovinare' il numero che uscirà;

-'indovinare' che uscirà un numero dispari;

-'indovinare' che uscirà un numero rosso.

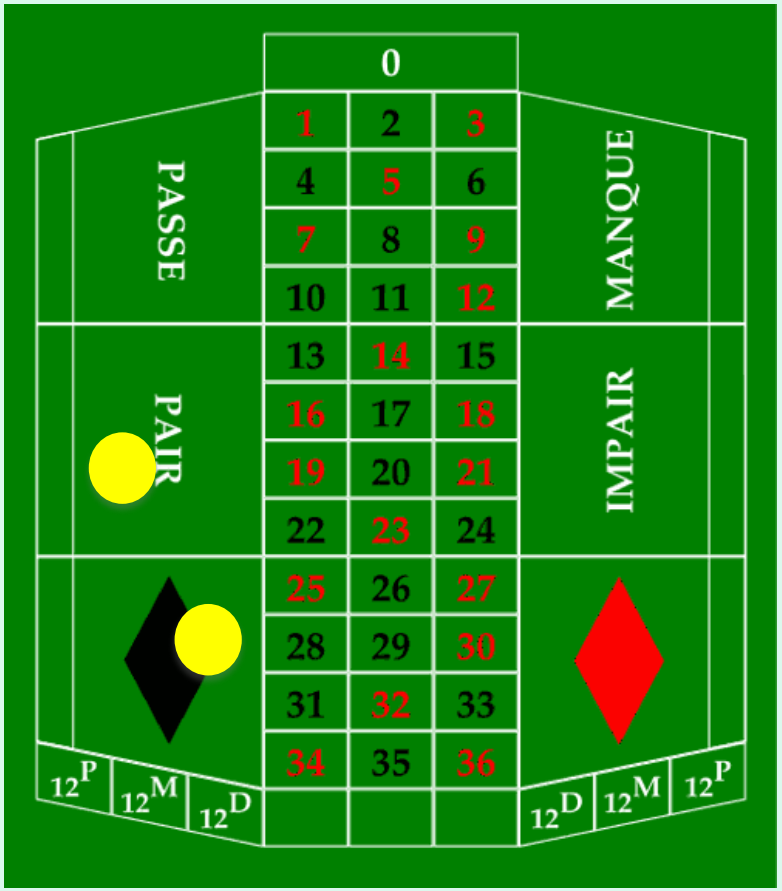
La roulette

Il ruolo dello zero



Se esce zero, tutti i giocatori perdono, con una sola eccezione: il giocatore che ha scommesso sull'uscita del numero zero vince, come quando scommette su un altro qualsiasi numero.

Daniela Valenti 2020



Scommetto su due eventi

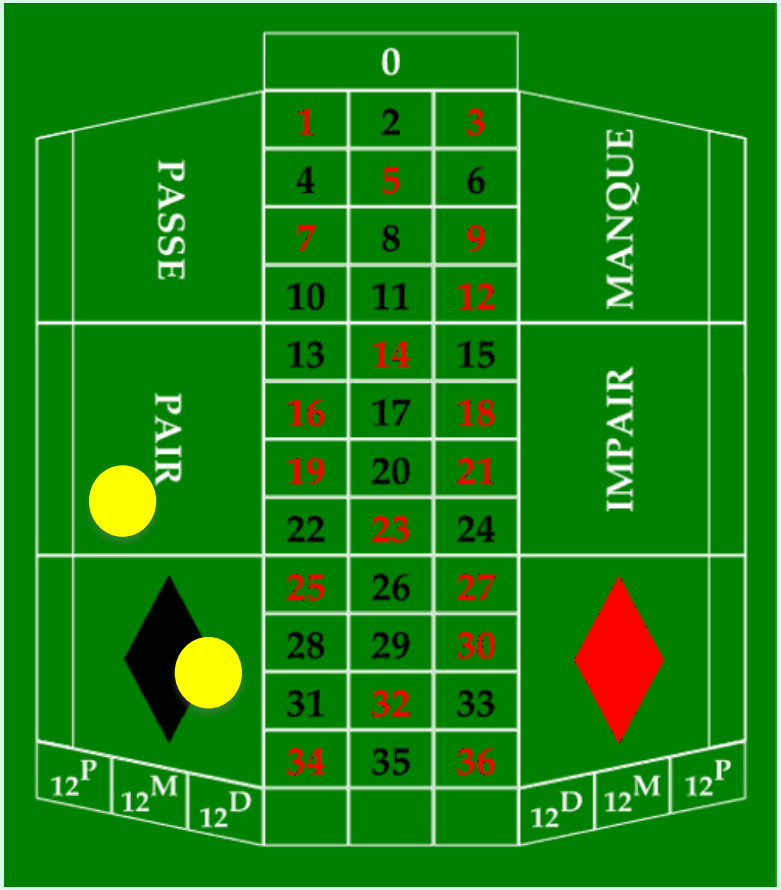
Punto un gettone su nero e un gettone su pari.
Ora debbo pensare a due eventi 'Esce un numero nero', 'Esce un numero pari'.

Come posso valutare la probabilità di vincere in questa nuova situazione?

Esamino casi possibili e casi favorevoli

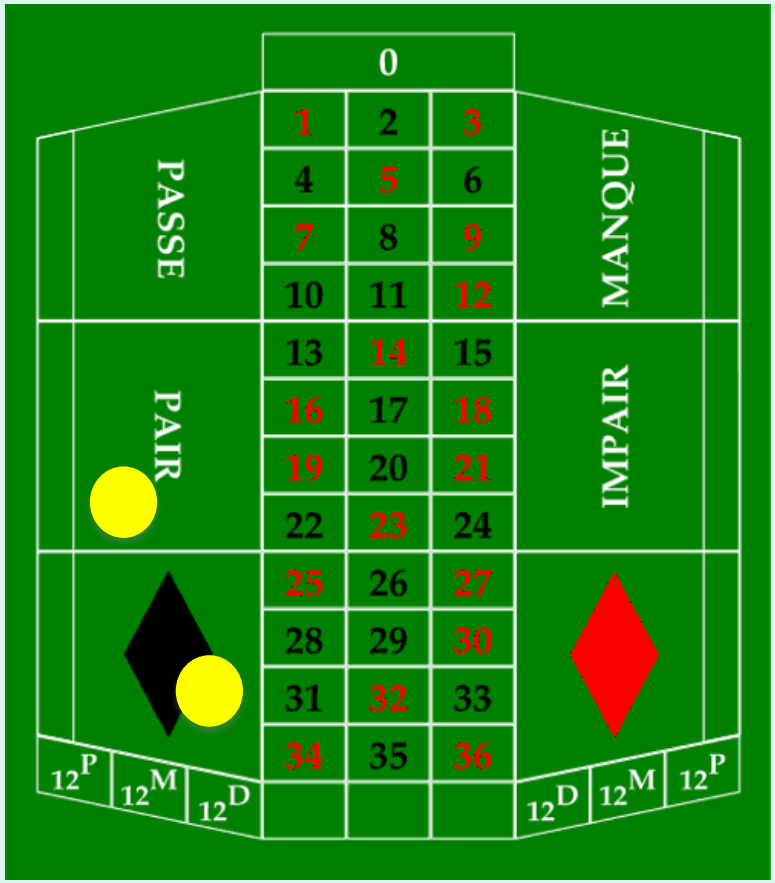
Ecco come potrei ragionare:

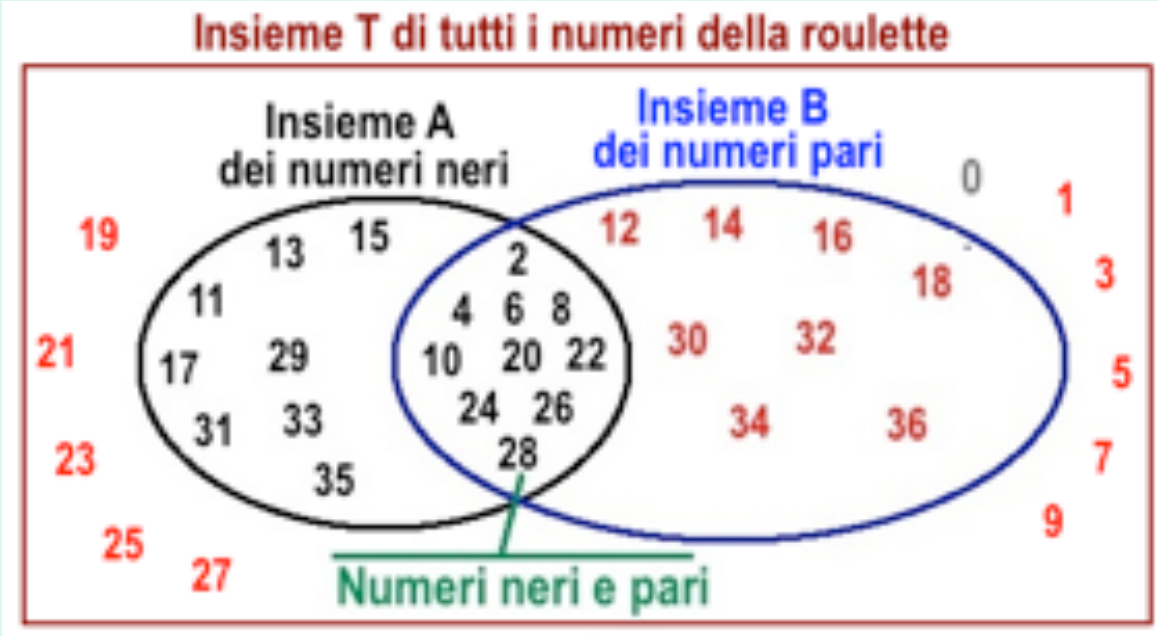
- **i casi possibili sono i 37 numeri della roulette;**
- **fra i 37 numeri ne trovo 18 neri e 18 pari, perciò i casi favorevoli sono 18 + 18 = 36;**
- **la probabilità di vincita è** $p = \frac{36}{37} \cong 0{,}973$



La probabilità è molto vicina ad 1.
Ho ragionato bene?
Sono quasi sicuro di vincere?

Conto meglio i numeri favorevoli

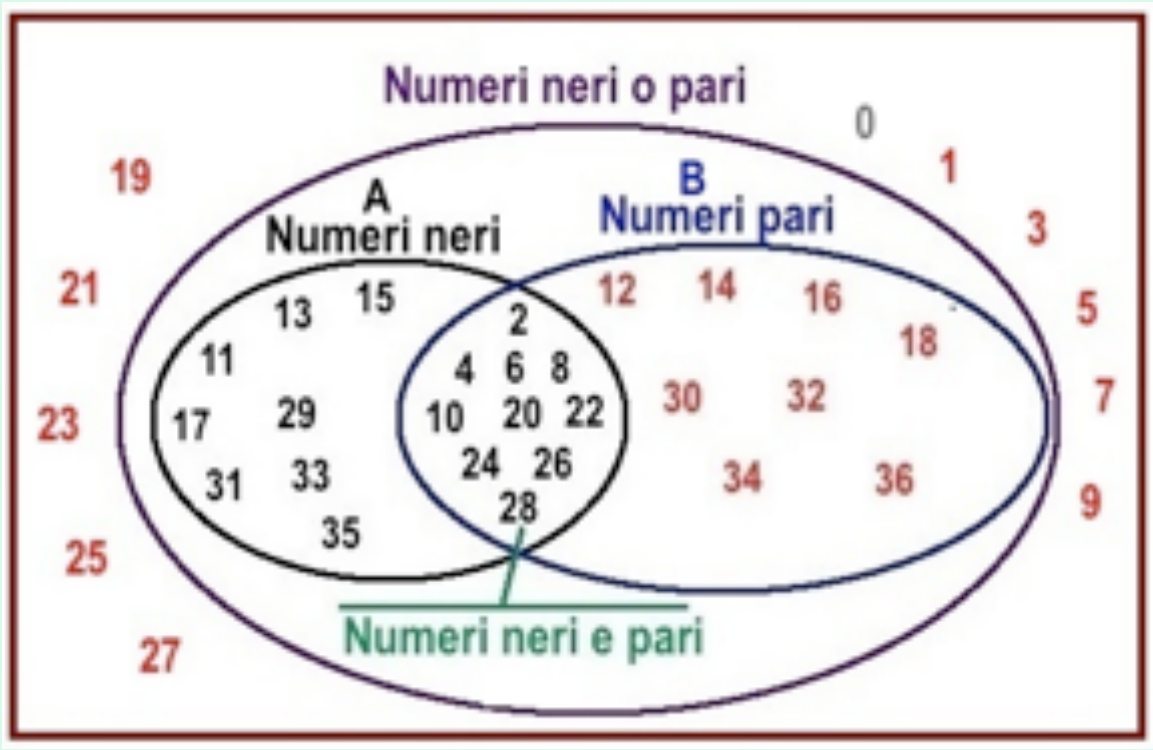




Ho trovato l'errore:

***ho contato due volte i 10 numeri neri e pari*, una volta nell'insieme A dei numeri neri e un'altra volta nell'insieme B dei numeri pari.**

Conto meglio i numeri favorevoli



Ecco una frase e una figura che descrivono in modo corretto i numeri favorevoli alla mia vincita:

sono i numeri neri o pari

dove *o* è *inclusivo*, come il *vel* latino, cioè *include* i numeri che sono solo neri, solo pari, ma anche neri e pari, contati però una sola volta.

Valuto la probabilità

Ecco allora come valuto le probabilità che mi interessano

Evento	Numero di alternative	Numero di casi favorevoli	Probabilità
Esce uno dei 18 numeri neri	37	18	$q = \frac{18}{37}$
Esce uno dei 18 numeri pari	37	18	$r = \frac{18}{37}$
Esce uno dei 10 numeri neri e pari	37	10	$s = \frac{10}{37}$
Esce un numero nero o pari	37	18 + 18 – 10	$p = \frac{18+18-10}{37} = \frac{26}{37}$

Così la probabilità *p* che esca un numero nero o pari è

$$p = \frac{26}{37} \cong 0{,}703$$

Valutare la probabilità

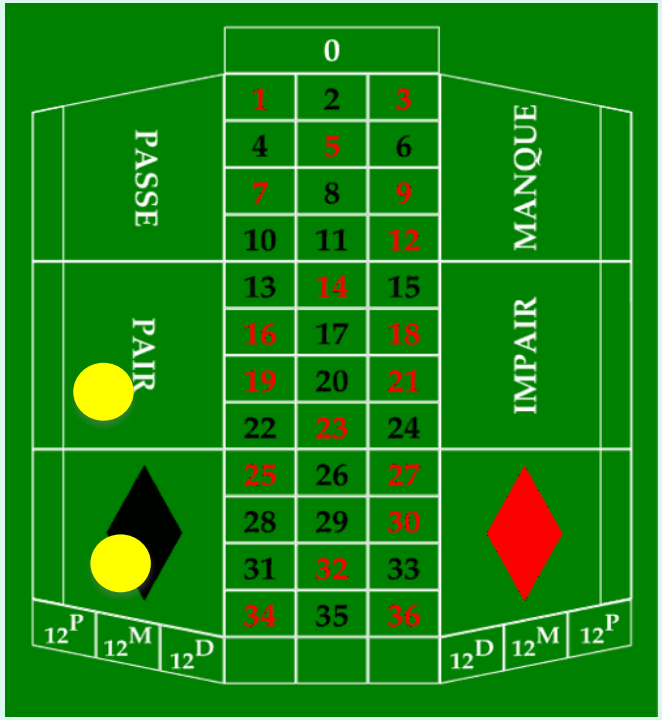
Osservo che risulta: $$p = \frac{18+18-10}{37} = \frac{18}{37} + \frac{18}{37} - \frac{10}{37}$$

Così scrivo la probabilità *p* in altra forma

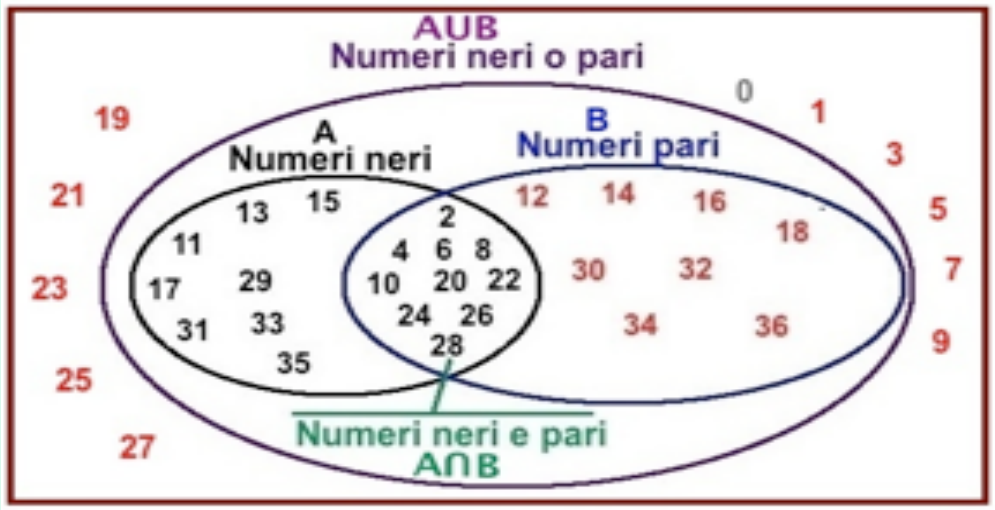
Evento	Numero di alternative	Numero di casi favorevoli	Probabilità
Esce uno dei 18 numeri neri	37	18	$q = \frac{18}{37}$
Esce uno dei 18 numeri pari	37	18	$r = \frac{18}{37}$
Esce uno dei 10 numeri neri e pari	37	10	$s = \frac{10}{37}$
Esce un numero nero o pari	37	18 + 18 – 10	$p = \frac{18}{37} + \frac{18}{37} - \frac{10}{37}$

$$p = q + r - s$$

Il linguaggio degli insiemi e della probabilità



Evento	Probabilità
A esce un numero nero	$P(A)=\frac{18}{37}$
B esce un numero pari	$P(B)=\frac{18}{37}$
A∩B Esce un numero nero **e** pari	$P(A\cap B)=\frac{10}{37}$
A∪B Esce un numero nero **o** pari	$P(A\cup B)=\frac{18}{37}+\frac{18}{37}-\frac{10}{37}$



Valuto la **probabilità totale** che si verifichi A **o** B

La probabilità totale di due eventi

Posso ripetere lo stesso procedimento per risolvere tutti i problemi descritti qui sotto.

Due eventi A, B

Evento	Probabilità
A	$P(A)$
B	$P(B)$
$A \cap B$	$P(A \cap B)$
$A \cup B$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Valuto la **probabilità totale** che si verifichi A **o** B (**o** inclusivo)

Attività

Completa la scheda di lavoro per riflettere sulla probabilità totale

Riflessioni sulle risposte date

Primo problema

Estrai una carta da un mazzo di carte napoletane ben mischiate.

Valuta la probabilità di estrarre una figura o una carta di bastoni

Due procedimenti per risolvere il problema

Calcola la probabilità p di estrarre una figura o una carta di bastoni

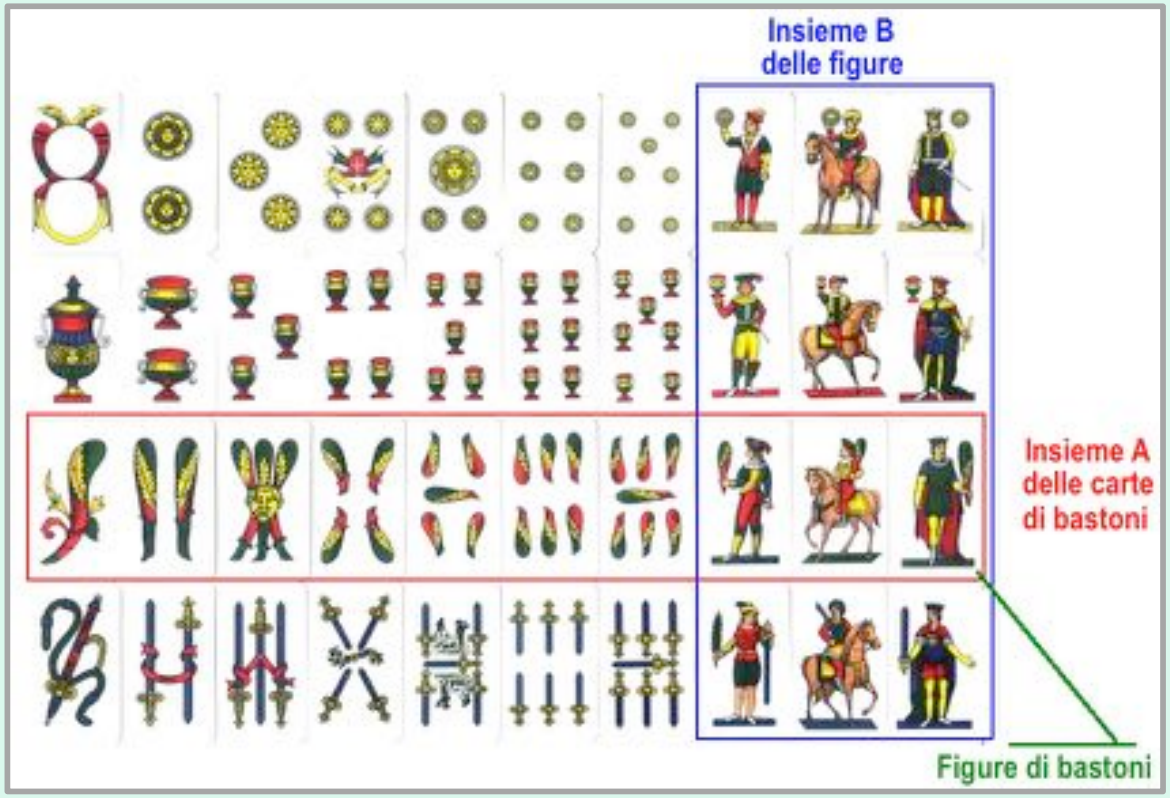
Procedimento 1

Osservo il disegno degli insiemi e conto:

Qual è il numero N di casi possibili?

Qual è il numero F di casi favorevoli?

Qual è la probabilità p?



Due procedimenti per risolvere il problema

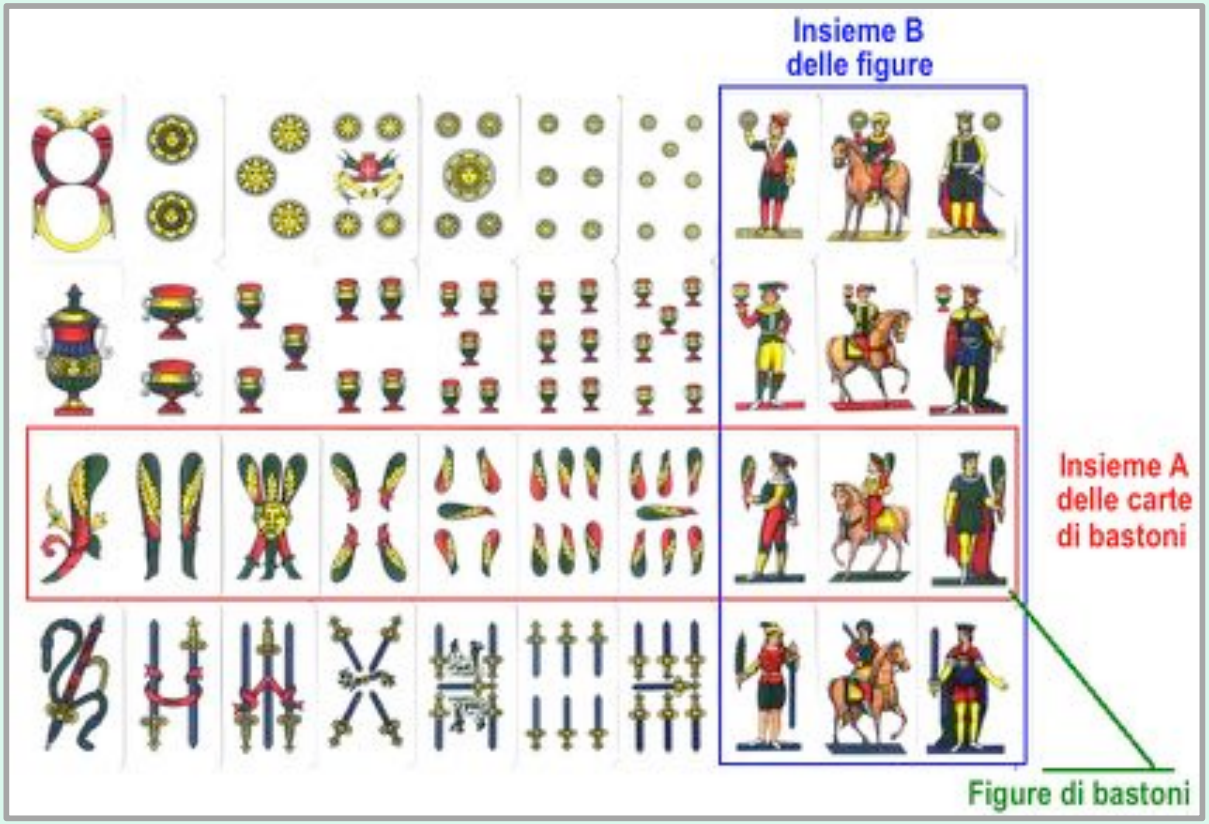
Valuta la probabilità p di estrarre una figura o una carta di bastoni

Procedimento 1

Osservo il disegno gli insiemi e conto:

Qual è il numero N di casi possibili? N = 40

Qual è il numero F di casi favorevoli? F = 19



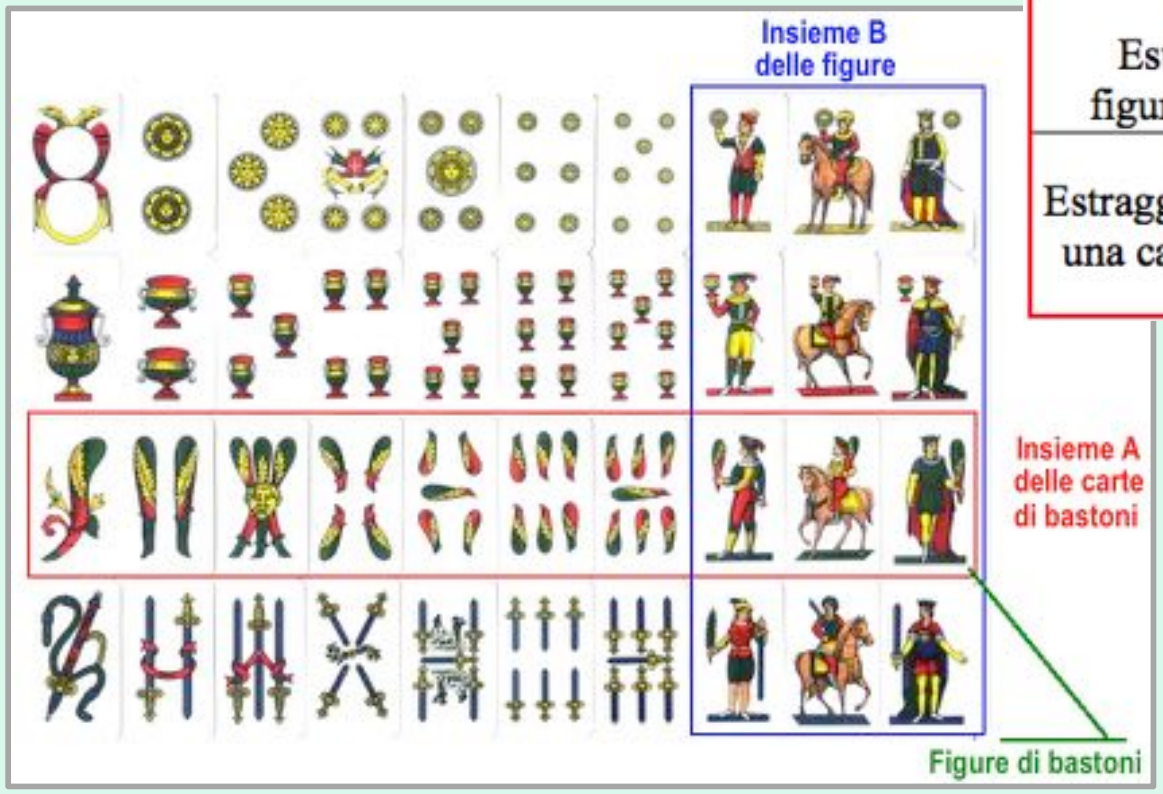
$$p = \frac{19}{40} = 0{,}475$$

Due procedimenti per risolvere un problema

Valuta la probabilità di estrarre una figura o una carta di bastoni

Procedimento 2.
Applico la probabilità totale

Evento	Probabilità
A Estraggo una carta di bastoni	$P(A)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}=0{,}25$
B Estraggo una figura	$P(B)=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}=0{,}3$
$A\cap B$ Estraggo una figura di bastoni	$P(A\cap B)=\frac{3}{40}=0{,}075$
$A\cup B$ Estraggo una figura o una carta di bastoni	$P(A\cup B)=$ $=\frac{10}{40}+\frac{12}{40}-\frac{3}{40}=\frac{19}{40}=0{,}475$



Secondo problema

2. Una scuola di 1000 studenti organizza alla fine dell'anno un'indagine sull'efficacia di un corso opzionale di inglese; la tabella sotto elenca gli esiti dell'indagine.
Uno studente della scuola viene estratto a sorte per partecipare a un viaggio in Inghilterra.

	Partecipazione al corso		
Voto in inglese	**no**	**si**	**TOTALI**
Voto ≤ 6	200	75	**275**
Voto > 6	225	500	**725**
TOTALI	**425**	**575**	**1000**

Valuta la probabilità p di estrarre uno studente che ha un voto maggiore di 6 in inglese **o** ha partecipato al corso opzionale.

Due procedimenti per risolvere il problema

Valuta la probabilità p di estrarre uno studente che ha un voto maggiore di 6 in inglese **o** ha partecipato al corso opzionale.

Procedimento 1

Osservo la tabella e conto:

Qual è il numero N di casi possibili?

Qual è il numero F di casi favorevoli?

Qual è la probabilità p?

	Partecipazione al corso		
Voto in inglese	**no**	**si**	**TOTALI**
Voto ≤ 6	200	75	**275**
Voto > 6	225	500	**725**
TOTALI	**425**	**575**	**1000**

Due procedimenti per risolvere il problema

Valuta la probabilità p di estrarre uno studente che ha un voto maggiore di 6 in inglese **o** ha partecipato al corso opzionale.

Procedimento 1

Osservo la tabella e conto:

Qual è il numero N di casi possibili? N = 1000

Qual è il numero F di casi favorevoli? F = 725 + 75 = 795

Qual è la probabilità p?

$$p = \frac{795}{1000} = 0,795$$

	Partecipazione al corso		
Voto in inglese	**no**	**si**	**TOTALI**
Voto ≤ 6	200	75	**275**
Voto > 6	225	500	**725**
TOTALI	**425**	**575**	**1000**

Secondo problema

Applico la probabilità totale

	Partecipazione al corso		
Voto in inglese	**no**	**si**	**TOTALI**
Voto ≤ 6	200	75	275
Voto > 6	225	500	725
TOTALI	425	575	**1000**

A: estraggo studente con voto maggiore di 6.	$P(A) = \frac{725}{1000} = 0,725$
B: estraggo studente che ha partecipato al corso	$P(B) = \frac{575}{1000} = 0,575$
$A \cap B$: estraggo studente con voto > 6 e che ha partecipato a corso	$P(A \cap B) = \frac{500}{1000} = 0,500$
$A \cup B$: estraggo studente con voto > 6 e che ha partecipato a corso	$P(A \cup B) = 0,725 + 0,575 - 0,500 = 0,795$

Calcoli con le probabilità

Per scrivere una probabilità posso scegliere fra:
- una frazione;
- un numero decimale;
- una percentuale.
Finora abbiamo lavorato molto spesso con le frazioni.
Che cosa cambia lavorando con i numeri decimali?

Riprendo due problemi per riflettere

Confronto calcoli con le probabilità

1. Valuto la probabilità di estrarre una figura o una carta di bastoni

Evento	Probabilità con frazioni	Probabilità con decimali
A Estraggo una carta di bastoni	$P(A)=\frac{10}{40}=0,25$	$P(A)=0,25$
B Estraggo una figura	$P(B)=\frac{12}{40}=0,3$	$P(B)=0,3$
$A\cap B$ Estraggo una figura di bastoni	$P(A\cap B)=\frac{3}{40}=0,075$	$P(A\cap B)=0,075$
$A\cap B$ Estraggo una figura **o** una carta di bastoni	$P(A\cup B)=\frac{10}{40}+\frac{12}{40}-\frac{3}{40}=\frac{19}{40}$	$P(A\cup B)=0,25+0,3-0,075=0,475$

$\frac{10}{40}=0,25$ $\quad\frac{12}{40}=0,3$ $\quad\frac{19}{40}=0,475$

Denominatore 40 = 2^3x 5, composto solo con 2 e 5.

Numeri decimali finiti, scritti con tutte le loro cifre

Confronto calcoli con le probabilità

2. Alla roulette valuto la probabilità che esca nero o pari

Evento	Probabilità con frazioni	Probabilità con decimali
A Esce un numero nero	$P(A)=\frac{18}{37}\cong 0,49$	$P(A)\cong 0,49$
B Esce un numero pari	$P(B)=\frac{18}{37}\cong 0,49$	$P(B)\cong 0,49$
$A\cap B$ Esce un numero nero e pari	$P(A\cap B)=\frac{10}{37}\cong 0,27$	$P(A\cap B)\cong 0,27$
$A\cup B$ Esce un numero nero o pari	$P(A\cup B)=\frac{18}{37}+\frac{18}{37}-\frac{10}{37}=\frac{26}{37}$	$P(A\cup B)\cong 0,49+0,49-0,27=0,71$

$\frac{18}{37}\cong 0,49$ $\quad$ $\frac{10}{37}\cong 0,27$ $\quad$ $\frac{26}{37}\cong 0,70$

Denominatore 37, NON composto con 2 o 5.

Numeri decimali con infinite cifre, arrotondati con due cifre dopo la virgola

Confronto calcoli con le probabilità

La soluzione dei problemi porta a richiamare che:

- **i calcoli con le frazioni conducono sempre a risultati esatti;**
- **se 'traduco' le frazioni in numeri decimali trovo le due situazioni illustrate qui sotto.**

Situazioni	Numero decimale	Risultato dei calcoli con i decimali
A. Ogni frazione ha il denominatore composto solo con i numeri 2 o 5.	Ha un numero finito di cifre dopo la virgola.	Esatto, se svolgo i calcoli con **tutte** le cifre dopo la virgola.
B. Tutti gli altri casi	Il numero decimale viene arrotondato	Approssimato