

La funzione esponenziale ed il suo grafico

Potenze ad esponente reale

Gli esercizi dall'1 al 13 conducono a calcolare potenze con esponente intero o razionale. Per svolgere gli esercizi è opportuno tener presenti le seguenti definizioni:

$$a^0 = 1 \quad (\text{con } a \neq 0)$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad (\text{con } a \neq 0 \text{ e } m \text{ intero positivo})$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \quad (\text{con } a \text{ numero reale, } p \text{ e } q \text{ interi positivi})$$

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}} \quad (\text{con } a \neq 0, p \text{ e } q \text{ interi positivi})$$

Calcola il valore delle potenze indicate negli esercizi dall'1 al 15

1. 2^3 ; 3^2 ; 5^2 ; 2^5 ; 3^3 ; 4^2 .

2. 5^2 ; $(-5)^2$; -5^2 ; 3^4 ; $(-3)^4$; -3^4 .

3. 4^3 ; $(-4)^3$; -4^3 ; 2^5 ; $(-2)^5$; -2^5 .

4. 3^0 ; $(-3)^0$; -3^0 ; $\left(\frac{4}{5}\right)^0$; $-8,75^0$; π^0 .

5. 2^{-4} ; 4^{-2} ; 8^{-1} ; $\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$; π^{-3} .

6. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^4$; $2,5^3$; $0,4^{-3}$; $0,01^2$; 100^{-2} .

7. 3^{-4} ; $(-3)^{-4}$; -3^4 ; 7^{-2} ; $(-7)^{-2}$; -7^{-2} .

8. 4^{-3} ; $(-4)^{-3}$; -4^{-3} ; 2^{-5} ; $(-2)^{-5}$; -2^{-5} .

9. $16^{\frac{1}{2}}$; $-16^{\frac{1}{2}}$; $(-16)^{\frac{1}{2}}$; $16^{\frac{1}{4}}$; $-16^{\frac{1}{4}}$; $(-16)^{\frac{1}{4}}$.

10. $27^{\frac{1}{3}}$; $-27^{\frac{1}{3}}$; $(-27)^{\frac{1}{3}}$; $32^{\frac{1}{5}}$; $-32^{\frac{1}{5}}$; $(-32)^{\frac{1}{5}}$.

11. I risultati degli esercizi 9 e 10 sono tutti numeri reali? Motiva la tua risposta.

12. $2^{\frac{3}{5}}$; $2^{-\frac{3}{5}}$; $-2^{\frac{3}{5}}$; $-2^{-\frac{3}{5}}$; $(-2)^{\frac{3}{5}}$; $(-2)^{-\frac{3}{5}}$.

13. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{4}}$; $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{4}}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$; $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$; $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{4}{3}}$.

14. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$; $-\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$; $4^{\frac{1}{2}}$; $(-4)^{\frac{1}{2}}$; $-4^{-\frac{1}{2}}$.

15. I risultati degli esercizi 12,13 e 14 sono tutti numeri reali? Motiva la tua risposta.

Fra le uguaglianze proposte negli esercizi dal 16 al 19 scegli quali sono vere e quali false e motiva la tua risposta.

$$16. 3^{-4} = -81; \quad 3^{-4} = \frac{1}{81}; \quad 3^{-4} = \frac{1}{3^4}; \quad 3^{-4} = \sqrt[4]{3}.$$

$$17. (-2)^{-2} = 2^2; \quad (-2)^{-2} = -2^{-2}; \quad (-2)^{-2} = \frac{1}{4}; \quad (-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2}.$$

$$18. \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = -1; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{2}.$$

$$19. 8^{\frac{2}{3}} = 4; \quad (-8)^{\frac{2}{3}} = -4; \quad 8^{-\frac{2}{3}} = -4; \quad 8^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}.$$

Con il tasto y^x di una calcolatrice scientifica calcola con 3 di cifre significative il valore delle potenze assegnate negli esercizi dal 20 al 22.

$$20. 2^{\sqrt{2}}; \quad \sqrt{2}^2; \quad 2^{-\sqrt{2}}; \quad 2^{\pi}; \quad 2^{-\pi}; \quad \sqrt{2}^{-2}$$

$$21. 10^{\sqrt{3}}; \quad 10^{\sqrt{5}}; \quad 10^{\sqrt{10}}; \quad 10^{-\sqrt{3}}; \quad 10^{-\sqrt{5}}; \quad 10^{-\sqrt{10}}.$$

$$22. \pi^{\pi}; \quad \sqrt{3}^{\sqrt{3}}; \quad \sqrt{7}^{\sqrt{7}}; \quad \pi^{-\pi}; \quad \sqrt{3} - \sqrt{3}; \quad \sqrt{7} - \sqrt{7}$$

23. Fra i risultati degli esercizi da 20 a 22 trova quelli che puoi ottenere senza usare la calcolatrice.

La funzione esponenziale

Traccia il grafico delle funzioni assegnate negli esercizi dal 24 al 31, dove A indica il dominio e B il codominio della funzione.

24. A è l'insieme dei reali, B è l'insieme dei reali, risulta $y = 2^x$.

A è l'insieme dei reali positivi, B è l'insieme dei reali, risulta $y = 2^x$.

Sul secondo grafico puoi trovare punti con l'ordinata minore di 1? Motiva la risposta,

25. A è l'insieme dei razionali, B è l'insieme dei reali, risulta $y = 2^x$.

Indica tre punti che non puoi trovare sul grafico.

26. A è l'insieme degli interi, B è l'insieme dei razionali, risulta $y = 2^x$.

Indica tre punti che non puoi trovare sul grafico.

27. A è l'insieme degli interi positivi, B è l'insieme dei razionali, risulta $y = 2^x$.

Ci sono sul grafico punti con l'ordinata che non è un numero intero?

28. Ripeti gli esercizi 24, 25, 26, 27 a partire dalla legge $y = 3^x$

29. A è l'insieme dei reali, B è l'insieme dei reali, risulta $y = 0,5^x$.

A è l'insieme dei reali positivi, B è l'insieme dei reali, risulta $y = 0,5^x$.

Sul secondo grafico puoi trovare punti con l'ordinata maggiore di 1? Motiva la risposta.

30. A è l'insieme degli interi positivi, B è l'insieme dei razionali, risulta $y = 0,5^x$.

A è l'insieme degli interi negativi, B è l'insieme dei razionali, risulta $y = 0,5^x$.

Ci sono sul secondo grafico dei punti con l'ordinata che non è un numero intero?

31. Ripeti gli esercizi 29 e 30 a partire dalla legge $y = 0,25^x$.

La curva esponenziale

32. Traccia sullo stesso piano cartesiano il grafico delle seguenti funzioni esponenziali, che hanno tutte come dominio l'insieme dei numeri reali:

$$y = 1^x; \quad y = 1,01^x; \quad y = 1,1^x; \quad y = 1,5^x; \quad y = 1,9^x$$

Le curve ottenute sono crescenti o decrescenti?

Indica su ciascuna curva il punto P d'ascissa 1 ed il punto Q d'ascissa 2 ; come puoi confrontare la rapidità di crescita (o di decrescita) delle curve?

33. Ripeti l'esercizio 32 , a partire dalle seguenti funzioni esponenziali:

$$y = 2^x; \quad y = 4^x; \quad y = 8^x; \quad y = 10^x$$

Indica su ciascuna curva il punto P d'ascissa 0,5 ed il punto Q d'ascissa 1 ; come puoi confrontare la rapidità di crescita (o di decrescita) delle curve?

34. Ripeti l'esercizio 32, a partire dalle seguenti funzioni esponenziali:

$$y = 0,01^x; \quad y = 0,1^x; \quad y = 0,2^x; \quad y = 0,4^x$$

Indica su ciascuna curva il punto P d'ascissa 0,5 ed il punto Q d'ascissa 1 ; come puoi confrontare la rapidità di crescita (o di decrescita) delle curve?

35. Ripetere l'esercizio 32 , a partire dalle seguenti funzioni esponenziali:

$$y = 0,5^x; \quad y = 0,7^x; \quad y = 0,9^x; \quad y = 0,99^x; \quad y = 1^x$$

Indica su ciascuna curva il punto P d'ascissa 0,5 ed il punto Q d'ascissa 1 ; come puoi confrontare la rapidità di crescita (o di decrescita) delle curve?

36. Per confrontare la curva esponenziale con altre curve note, traccia il grafico delle seguenti funzioni:

$$y = 2^x; \quad y = 2x; \quad y = x^2.$$

Le tre curve hanno dei punti in comune?

Puoi decidere quale delle tre curve cresce più rapidamente?

37. Per confrontare la curva esponenziale con altre curve note, traccia il grafico delle seguenti funzioni:

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x; \quad y = \frac{1}{2}x; \quad y = \frac{1}{2x}; \quad y = \frac{1}{2x}; \quad y = x^{\frac{1}{2}}$$

Per le ultime due funzioni si può scegliere come dominio l'insieme dei reali?

Le quattro curve hanno dei punti in comune?

Hai ottenuto tutte curve decrescenti?

38. Traccia il grafico delle seguenti funzioni:

$$y = 3^x, y = 3^{-x}, y = -3^x, y = -3^{-x}$$

È possibile tracciare il grafico di $y = (-3)^x$? Motiva la risposta

39. Ripetere l'esercizio 38 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x; \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}; \quad y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x; \quad y = -\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}.$$

È possibile tracciare il grafico di $y = \left(-\frac{1}{3}\right)^x$? Motiva la risposta

40. Fra le seguenti affermazioni scegliere quelle vere e quelle false e motiva la tua scelta:
- a. Qualunque sia la base a , reale positiva, il grafico della funzione $y = a^x$ si trova sempre al disopra dell'asse delle x .
 - b. Qualunque sia la base a , reale positiva, il grafico della funzione $y = a^x$ è sempre crescente.
 - c. Qualunque sia la base a , reale positiva, il grafico della funzione $y = a^x$ si avvicina all'asse delle x , se si assegnano alla x valori sempre più grandi.
 - d. Il grafico della funzione $y = a^x$ si avvicina all'asse delle x per valori di x sempre più grandi, solo se la base a è un numero positivo minore di 1 .