

La funzione logaritmo ed il suo grafico

Calcola logaritmi con carta e penna

Per risolvere gli esercizi da 1 a 15, applica la nozione di logaritmo richiamata qui sotto.

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y$$

Esercizio svolto

$$\text{Calcolo } \log_3 9 = y \Leftrightarrow 9 = 3^y \Rightarrow y = 2$$

Determina il valore dei logaritmi indicati negli esercizi da 1 a 4.

1. $\log_2 8$; $\log_2 2$; $\log_2 1$; $\log_2 \frac{1}{2}$; $\log_2 \frac{1}{16}$; $\log_2 \sqrt{2}$.
2. $\log_3 \frac{1}{3}$; $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\log_3 1$; $\log_3 3$; $\log_3 81$; $\log_3 \sqrt{27}$.
3. $\log_{0,5} 16$; $\log_{0,5} 2$; $\log_{0,5} 0,5$; $\log_{0,5} 1$; $\log_{0,5} 0,25$; $\log_{0,5} \sqrt{8}$.
4. $\log_{0,2} 125$; $\log_{0,2} 5$; $\log_{0,2} 1$; $\log_{0,2} 0,2$; $\log_{0,2} 0,008$; $\log_{0,2} \sqrt{5}$.

Esercizio svolto

Calcolo il numero x di cui è dato il logaritmo

$$\log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 3^2 \Rightarrow x = 9$$

Determina il numero x , di cui è assegnato il logaritmo negli esercizi da 5 a 8.

5. $\log_4 x = 0$; $\log_7 x = 0$; $\log_{10} x = 0$; $\log_{0,8} x = 0$; $\log_{0,1} x = 0$.
6. $\log_5 x = 1$; $\log_8 x = 1$; $\log_{10} x = 1$; $\log_{0,3} x = 1$; $\log_{0,1} x = 1$.
7. $\log_3 x = -1$; $\log_6 x = -2$; $\log_{10} x = -1$; $\log_{0,6} x = -3$; $\log_{0,1} x = -1$.
8. $\log_3 x = \frac{1}{2}$; $\log_6 x = \frac{1}{3}$; $\log_{10} x = \frac{5}{4}$; $\log_{0,6} x = \frac{2}{3}$; $\log_{0,1} x = \frac{3}{2}$.

Esercizio svolto

Calcolo la base a di un dato logaritmo

$$\log_a 4 = 2 \Leftrightarrow 4 = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{4} = 2$$

Determina la base a di ciascun logaritmo assegnato negli esercizi da 9 a 12.

9. $\log_a 9 = 2$; $\log_a 8 = 3$; $\log_a 4 = 1$; $\log_a 3 = -1$; $\log_a 0,01 = -2$.
10. $\log_a 0,25 = 2$; $\log_a 2 = -1$; $\log_a 0,4 = 1$; $\log_a 81 = 4$; $\log_a 0,01 = 2$.
11. $\log_a 16 = 4$; $\log_a 8 = -3$; $\log_a 4 = -1$; $\log_a 3 = 1$; $\log_a 100 = 2$.
12. $\log_a \sqrt{3} = \frac{1}{2}$; $\log_a \sqrt{8} = \frac{3}{2}$; $\log_a \sqrt{27} = -\frac{3}{2}$; $\log_a \sqrt{5} = -\frac{1}{2}$; $\log_a \sqrt{1000} = \frac{3}{2}$.

Confronta i valori x ed y assegnati negli esercizi 13 e 14.

13. $x = \log_a b$ e $y = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b}$; $x = \log_a \sqrt{a}$ e $y = \log_{\sqrt{a}} a$.
14. $x = \log_a \frac{1}{a}$ e $y = \log_{\frac{1}{a}} a$; $\log_x a = 1$ e $\log_y a = -1$.

Curva logaritmica

15. Traccia sullo stesso piano cartesiano il grafico delle seguenti funzioni, che hanno tutte come dominio l'insieme dei numeri reali positivi:

$$y = \log_2 x; \quad y = \log_4 x; \quad y = \log_{10} x$$

Si ottengono curve crescenti o decrescenti?

Indica su ciascuna curva il punto P di ordinata 0,5 ed il punto Q di ordinata 1; come puoi confrontare la rapidità di crescita (o di decrescita) delle curve?

16. Ripeti l'esercizio 15 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y = \log_{0,1} x; \quad y = \log_{0,5} x; \quad y = \log_{0,9} x;$$

17. Traccia il grafico delle seguenti funzioni:

$$y = 3^x; \quad y = \log_3 x; \quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x; \quad y = \log_{\frac{1}{3}} x.$$

Rispondi ai seguenti quesiti:

- Quali simmetrie trasformano la prima curva in ciascuna delle altre?
- Quali simmetrie trasformano la seconda curva in ciascuna delle altre?
- Quali simmetrie trasformano la terza curva in ciascuna delle altre?
- Quali simmetrie trasformano l'ultima curva in ciascuna delle altre?

18. Ripeti l'esercizio 17 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y = \left(\frac{5}{2}\right)^x; \quad y = \left(\frac{2}{5}\right)^x; \quad y = \log_{\frac{5}{2}} x; \quad y = \log_{\frac{2}{5}} x$$

19. Ripeti l'esercizio 17 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y = a^x, y = \left(\frac{1}{a}\right)^x, y = \log_a x, y = \log_{\frac{1}{a}} x$$

20. Ripeti l'esercizio 17 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y = \log_2 x; \quad y = -\log_2 x; \quad y = \log_2(-x); \quad y = -\log_2(-x).$$

Puoi scegliere ancora l'insieme dei reali positivi come dominio delle ultime due funzioni?

21. Ripeti l'esercizio 17 a partire dalle seguenti funzioni:

$$y = \log_{0,5} x; \quad y = -\log_{0,5} x; \quad y = \log_{0,5}(-x); \quad y = -\log_{0,5}(-x).$$

Puoi scegliere ancora l'insieme dei reali positivi come dominio delle ultime due funzioni?

22. Ripeti gli esercizi 20 e 21 in generale a partire dalle seguenti funzioni:

$$y = \log_a x; \quad y = -\log_a x; \quad y = \log_a(-x); \quad y = -\log_a(-x).$$

Puoi scegliere ancora l'insieme dei reali positivi come dominio delle ultime due funzioni?

23. Fra le seguenti affermazioni scegliere quelle vere e quelle false e motiva la tua scelta:

- Qualunque sia la base a , reale positiva, il grafico della funzione $y = \log_a x$ si trova sempre al disopra dell'asse delle x .
- Qualunque sia la base a , reale positiva, il grafico della funzione $y = \log_a x$ si trova sempre a destra dell'asse delle y .
- Qualunque sia la base a , reale positiva, il grafico della funzione $y = \log_a x$ è sempre crescente.
- Qualunque sia la base a , reale positiva, il grafico della funzione $y = \log_a x$ si avvicina all'asse delle y , se si assegnano alla x valori positivi sempre più vicini a zero.