

Le proprietà dei logaritmi

Applica le proprietà dei logaritmi

Gli esercizi da 1 a 10 richiedono di applicare la I proprietà dei logaritmi.

I) $\log(ab) = \log a + \log b$

Esercizio svolto

1. È dato $\log 6 \cong 0,778$. Calcola con carta e penna il logaritmo decimale dei seguenti numeri:
60 6000

$$\log 60 = \log(6 \cdot 10) = \log 6 + \log 10 \cong 0,778 + 1 = 1,778$$

$$\log 6000 = \log(6 \cdot 10^3) = \log 6 + \log 10^3 \cong 0,778 + 3 = 3,778$$

2. È dato $\log 2 \cong 0,301$. Calcola il logaritmo decimale dei seguenti numeri con carta e penna.

$$20 = 2 \cdot 10; \quad 200 = 2 \cdot 10^2; \quad 2000 = 2 \cdot 10^3; \quad 20.000 = 2 \cdot 10^4$$

3. È dato $\log 5,8134 \cong 0,764$. Calcola il logaritmo decimale dei seguenti numeri con carta e penna

$$58,134; \quad 581,34; \quad 5813,4; \quad 58.134.$$

4. È dato $\log 9,7683 \cong 0,9898$. Calcola il logaritmo decimale dei seguenti numeri con carta e penna

$$97,683; \quad 976,83; \quad 9768,3; \quad 97.683.$$

Esercizio svolto

5. È dato $\log 6 \cong 0,778$. Calcola con carta e penna il logaritmo decimale dei seguenti numeri:
0,6 0,006

$$\log 0,6 = \log(6 \cdot 10^{-1}) = \log 6 + \log 10^{-1} \cong 0,778 + (-1) = 0,778 - 1 = -0,222$$

$$\log 0,006 = \log(6 \cdot 10^{-3}) = \log 6 + \log 10^{-3} \cong 0,778 + (-3) = -2,222$$

6. È dato $\log 3 \cong 0,4771$. Calcola il logaritmo decimale dei seguenti numeri con carta e penna

$$0,3 = 3 \cdot 10^{-1}; \quad 0,03 = 3 \cdot 10^{-2}; \quad 0,003 = 3 \cdot 10^{-3}; \quad 0,0003 = 3 \cdot 10^{-4}.$$

7. È dato $\log 7,61 \cong 0,8814$. Calcola il logaritmo decimale dei seguenti numeri con carta e penna

$$0,761; \quad 0,0761; \quad 0,00761; \quad 0,000761$$

Esercizio svolto

8. Calcola con carta e penna la seguente espressione: $\log 6 + \log \frac{1}{6}$

$$\log 6 + \log \frac{1}{6} = \log \left(6 \cdot \frac{1}{6} \right) = \log 1 = 0$$

Calcola con carta e penna le espressioni date negli esercizi 9 e 10

9. $\log 2 + \log \frac{1}{2}$; $\log 5 + \log \frac{1}{5}$; $\log \frac{2}{5} + \log \frac{5}{2}$; $\log \frac{3}{4} + \log \frac{4}{3}$.

10. $\log 2 + \log 5$; $\log 25 + \log 4$; $\log 0,05 + \log 2$; $\log \frac{1}{5} + \log \frac{1}{2}$.

Gli esercizi da 11 a 14 richiedono di applicare la II proprietà dei logaritmi

$$\text{II) } \log(a:b) = \log a - \log b \text{ oppure } \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

Esercizio svolto

11. Calcola con carta e penna l'espressione: $\log 6 - \log 0,6$

Applico la II proprietà e ottengo

$$\log 6 - \log 0,6 = \log (6:0,6) = \log 10 = 1$$

Calcola con carta e penna le espressioni date negli esercizi da 12 a 14

12. $\log 3 - \log 0,3$; $\log 0,82 - \log 0,082$; $\log 0,059 - \log 0,0059$.

13. $\log 5 - \log 0,5$; $\log 25 - \log 0,025$; $\log 8 - \log 0,08$

14. $\log 76 - \log 0,76$; $\log 3,71 - \log 0,0371$; $\log 0,23 - \log 0,0023$

Gli esercizi da 15 a 18 richiedono di applicare la III proprietà dei logaritmi

$$\text{III) } \log(a^p) = p \log a.$$

Esercizio svolto

15. Dato $\log 6 \cong 0,778$, calcola con carta e penna, il logaritmo dei seguenti numeri:

$$\frac{1}{6} = 6^{-1}; \quad \frac{1}{36} = 6^{-2}; \quad \sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}}; \quad \frac{1}{\sqrt{6}} = 6^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\log(6^{-1}) = -1 \cdot \log 6 = -\log 6 \cong -0,778$$

$$\log(6^{-2}) = -2 \cdot \log 6 \cong -1,556$$

$$\log\left(6^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \log 6 \cong 0,389$$

$$\log\left(6^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \log 6 \cong -0,389$$

16. Dato $\log 2 \cong 0,301$, calcola con carta e penna, il logaritmo dei seguenti numeri:

$$\frac{1}{2} = 2^{-1}; \quad \frac{1}{4} = 2^{-2}; \quad \frac{1}{16} = 2^{-4}; \quad \frac{1}{128} = 2^{-7}.$$

17. Dato $\log 4 \cong 0,602$, calcola con carta e penna, il logaritmo dei seguenti numeri:

$$\sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}}; \quad \frac{1}{\sqrt{4}} = 4^{-\frac{1}{2}}; \quad \sqrt[3]{16} = 16^{\frac{1}{3}}; \quad \frac{1}{\sqrt[4]{64}} = 64^{-\frac{1}{4}}$$

18. Dato $\log 7 \cong 0,845$, calcola con carta e penna, il logaritmo dei seguenti numeri:

$$\frac{1}{7}; \quad \frac{1}{49}; \quad \sqrt[4]{7}; \quad \frac{1}{\sqrt[3]{49}}$$

Gli esercizi da 19 a 25 conducono a riflettere su tutte le proprietà dei logaritmi.

I) $\log(ab) = \log a + \log b$

II) $\log(a:b) = \log a - \log b$

III) $\log(a^p) = p \log a$.

19. Scegli fra le seguenti uguaglianze quelle corrette e motiva la tua scelta:

$$\log(a+b) = \log a + \log b;$$

$$\log(1000+100) = 2+3;$$

$$\log(ab) = \log a + \log b;$$

$$\log(100 \cdot 1000) = 2+3;$$

$$\log(ab) = \log a \cdot \log b;$$

$$\log(100 \cdot 1000) = 2 \cdot 3$$

20. Scegli fra le seguenti uguaglianze quelle corrette e motiva la tua scelta:

$$\begin{aligned}\log(a:b) &= \log a - \log b; & \log(0,1:100) &= -1 - 2; \\ \log(a-b) &= \log a - \log b; & \log(0,1-100) &= -1 - 2; \\ \log(a:b) &= \log a : \log b; & \log(0,1:100) &= -1:2.\end{aligned}$$

21. Scegli fra le seguenti uguaglianze quelle corrette e motiva la tua scelta:

$$\begin{aligned}\log(-a) &= -\log a; & \log(-100) &= -2; \\ \log \frac{1}{a} &= \frac{1}{\log a}; & \log \frac{1}{100} &= \frac{1}{2}; \\ \log \frac{1}{a} &= -\log a; & \log \frac{1}{100} &= -2.\end{aligned}$$

22. Scegli fra le seguenti uguaglianze quelle corrette e motiva la tua scelta:

$$\begin{aligned}\log(a^p) &= (\log a)^p; & \log 10^3 &= 1^3 \\ \log(a^p) &= p \log a; & \log 10^3 &= 3 \cdot 1; \\ \log \sqrt{a} &= \sqrt{\log a}; & \log \sqrt{10} &= \sqrt{1}; \\ \log \sqrt{a} &= \frac{1}{2} \log a; & \log \sqrt{10} &= \frac{1}{2} \cdot 1.\end{aligned}$$

23. Scegli fra le seguenti uguaglianze quelle corrette e motiva la tua scelta:

$$\begin{aligned}\log(a^{\log a}) &= (\log a)^2; & \log(a^2) &= (\log a)^2; \\ \frac{1}{\log a} + \frac{1}{\log b} &= \frac{1}{\log(a+b)}; & \frac{1}{\log a} + \frac{1}{\log b} &= \frac{\log(ab)}{\log a \log b}.\end{aligned}$$

24. a è un numero positivo e risulta $n = \log a$; determina i numeri b, c, d per cui sono vere le seguenti uguaglianze

$$\log b = n + 1; \quad \log c = 2n; \quad \log d = n + \log 2$$

25. a è un numero positivo e risulta $n = \log a$; determina i numeri b, c, d per cui risulta

$$\log b = n - \log 2; \quad \log c = \frac{n}{2}; \quad \log d = n - 1.$$

Cambiamento di base

Gli esercizi da 27 a 28 richiedono di calcolare p il logaritmo in una base qualunque c di un numero a ; la regola è richiamata qui sotto:

$$\log_c a = \frac{\log a}{\log c}$$

Esercizio svolto

26. Calcola i seguenti logaritmi: $\log_7 35$ e $\log_7 49$

$$\log_7 35 = \frac{\log 35}{\log 7} \cong 1,827$$

$$\log_7 49 = \log 7^2 = 2 \quad (\text{Con carta e penna perché } 49 \text{ è una potenza della base } 7)$$

Calcola i logaritmi indicati negli esercizi dal 27 al 30. Indica, fra i logaritmi dati, quelli che puoi calcolare solo con carta e penna.

27. $\log_5 25$; $\log_5 50$; $\log_5 100$; $\log_3 9$; $\log_3 18$; $\log_3 45$.
 28. $\log_4 2$; $\log_4 0,5$; $\log_4 0,75$; $\log_8 0,125$; $\log_8 0,25$; $\log_8 2$.
 29. $\log_{0,2} 5$; $\log_{0,2} 0,1$; $\log_{0,2} 200$; $\log_{\frac{3}{4}} 3$; $\log_{\frac{3}{4}} 15$; $\log_{\frac{3}{4}} 0,375$.
 30. $\log_{0,4} 25$; $\log_{0,4} 0,25$; $\log_{40} 25$; $\log_{40} 0,25$; $\log_{20} 25$; $\log_{20} 0,25$.

Gli esercizi da 31 a 40 conducono ad approfondire le nozioni relative al cambiamento di base e a tutte le proprietà dei logaritmi.

Calcola il risultato delle espressioni assegnate negli esercizi da 31 a 40.

31. $\log 5 \cdot \log_5 10$; $\log_{0,5} 2 \cdot \log_2 0,5$; $\log_a b \cdot \log_b a$.
 32. $\log_{\frac{1}{2}} 5 + \log_2 5$; $\log_5 48 + \log_{\frac{1}{5}} 48$; $\log_{\frac{1}{a}} b + \log_a b$.
 33. $\log_{\frac{1}{2}} 5 - \log_2 \frac{1}{5}$; $\log_5 10 - \log_{\frac{1}{5}} 0,1$; $\log_{\frac{1}{a}} b - \log_a \frac{1}{b}$.
 34. $\frac{1}{\log_2 10} + \frac{1}{\log_5 10}$; $\frac{1}{\log_4 8} + \frac{1}{\log_{0,5} 8}$; $\frac{1}{\log_a c} + \frac{1}{\log_b c}$.
 35. $\frac{1}{\log_{20} 10} - \frac{1}{\log_2 10}$; $\frac{1}{\log_4 2} - \frac{1}{\log_{0,5} 2}$; $\frac{1}{\log_a c} - \frac{1}{\log_b c}$.
 36. $\frac{1}{\log_4 2}$; $\frac{1}{\log_5 10}$; $\frac{n}{\log_a b}$.
 37. $\log_7 15 \cdot \log_{15} 8 - \log_7 8$; $\log_7 15 \cdot \log_{15} 8 - \log_7 8$; $\log_a b \cdot \log_b c - \log_a c$.
 38. $\log_2 8 \cdot \log_8 64 \cdot \log_{64} 2$; $\log_3 0,5 \cdot \log_{0,5} 9 \cdot \log_9 3$; $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a$.
 39. $\log_9 25 \cdot \log_5 9$; $\log_4 49 \cdot \log_7 4$; $\log_{0,25} 36 \cdot \log_6 0,25$.
 Il risultato di tutte le espressioni è 2; puoi trovare una regola generale?
 40. $\log_9 25 \cdot \log_5 3$; $\log_4 49 \cdot \log_7 2$; $\log_{0,25} 36 \cdot \log_6 0,5$.
 Il risultato di tutte le espressioni è 1; puoi trovare una regola generale?

Problemi vari

I problemi proposti negli esercizi da 41 a 51 sono tratti dai campi più vari della scienza e della tecnica e conducono ad applicare le nozioni relative all'esponenziale e al logaritmo per risolvere problemi reali.

41. Il contagio di un'epidemia inizia con una persona malata, che infetta ogni settimana 3 persone e, alla fine della settimana, è guarita e immune, cioè non può più essere contagiata. L'epidemia continua: ogni contagiato si ammala e contagia in una settimana 3 persone e così via. Indica con t il tempo misurato in settimane, con N il numero di contagiati e completa la tabella seguente:

t	0	1	2	5
N	1	3	$9 = 3^2$	

Quale legge lega il tempo t al numero N di contagiati?
 Quanti saranno i contagiati dopo 10 settimane?
 Dopo quante settimane i contagiati sono più di 500 000?

42. L'intensità della sensazione prodotta da una sorgente sonora è descritta dalla seguente formula, che hai già incontrato durante la lezione:

$$S = 10 \log \frac{P}{P_0} \quad (1)$$

dove S è la misura in decibel dell'intensità della sensazione sonora, P è una misura dell'intensità della vibrazione prodotta dall'onda sonora nell'aria e P_0 è l'intensità minima udibile dall'orecchio umano. P è espressa dall'energia trasportata in 1 secondo da un fronte d'onda ampio 1 m^2 e si misura in W/m^2 .

Così risulta $P_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

Per esempio, il fruscio delle foglie agitate da una brezza primaverile misura circa 20 decibel, mentre suoni superiori a 120 decibel provocano sensazioni dolorose.

Determina in W/m^2 il valore di P corrispondente alla soglia del dolore (120 decibel) e al fruscio delle foglie (20 decibel).

43. Al momento del decollo un aereo supersonico produce un'onda sonora di intensità $P = 0,2 \text{ W/m}^2$; quanto vale, in decibel, la sensazione sonora corrispondente? Applica la legge (1) dell'esercizio 42.

44. In molti paesi è prevista una protezione acustica per gli operai che lavorano in un ambiente con un livello sonoro $S > 85$ decibel.

In una fabbrica viene utilizzata una macchina che produce un rumore intenso 60 decibel; se nello stesso ambiente vengono disposte affiancate due di queste macchine, il livello sonoro dell'ambiente richiede la protezione acustica degli operai? Applica la legge (1) dell'esercizio 42.

45. Dopo aver risolto l'esercizio 44, trova una formula generale per descrivere l'intensità S in decibel della sensazione sonora ottenuta sovrapponendo due suoni che producono sensazioni acustiche di S_1 ed S_2 decibel.

46. Oltre che in decibel, le sensazioni acustiche si misurano anche in *son*, con la formula seguente

$$s = 10^{2,4} P^{0,3} \quad (2)$$

dove s è la misura di una sensazione in son, mentre P è sempre l'intensità dell'onda sonora misurata in W/m^2 .

Confronta la formula (2) con la (1) esposta nell'esercizio 42 e spiega perché s raddoppia quando S aumenta di 10 decibel.

47. In chimica si introduce il pH di una sostanza nel modo seguente:

$$\text{pH} = -\log [\text{H}^+],$$

dove il simbolo $[\text{H}^+]$ indica la concentrazione degli ioni idrogeno presenti in una sostanza; questa concentrazione si misura in moli per litro. Così, ad esempio per l'acqua distillata, trovi $\text{pH} = 7$.

Prendono il nome di acidi le sostanze con $\text{pH} < 7$ e basi le sostanze con $\text{pH} > 7$.

Determina il pH delle seguenti sostanze:

- uova con $[\text{H}^+] = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ moli/litro}$,
- pomodori con $[\text{H}^+] = 6,3 \cdot 10^{-5} \text{ moli/litro}$,
- latte con $[\text{H}^+] = 4 \cdot 10^{-7} \text{ moli/litro}$.

48. Tieni presenti $[\text{H}^+]$ e pH introdotte nell'esercizio precedente e calcola $[\text{H}^+]$ delle seguenti sostanze:

- aceto con $\text{pH} = 3,1$,
- birra con $\text{pH} = 4,3$,
- succo di limone con $\text{pH} = 2,3$.

49. La luminosità di una stella osservata ad occhio nudo è misurata con la magnitudo M , definita nel modo seguente:

$$M = 6 - 2,5 \log \frac{I}{I_0}$$

dove I è l'intensità della luce proveniente dalla stella e I_0 è la minima intensità percepibile.

Verifica che per le stelle con minima intensità si ha $M = 6$.

Per le stelle più luminose risulta $M = 1$; quante volte è più intensa la luce proveniente da queste stelle, rispetto alla luce delle stelle con $M = 6$?

50. Per descrivere gli effetti di un terremoto si usa spesso la scala Richter, proposta dal sismologo americano C. Richter nel 1935. In base a questa scala si calcola la magnitudo M di un terremoto con la seguente formula:

$$M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$$

dove E , misurata in Joule, è l'energia totale sviluppata dal terremoto ed E_0 è la minima energia rilevata in un terremoto.

- Sai che risulta $M = 5,5$, quando è data $E = 10^{13}$ J, quanto vale E_0 ?
 - Il terremoto del 1985 in Messico aveva una magnitudo $M = 9$, quanta energia E è stata liberata in quel terremoto?
51. Nel 1976, due scosse di terremoto a maggio e a settembre di magnitudo $M_1 = 6,5$ e $M_2 = 6$ della scala Richter colpirono un vasto territorio a Nord di Udine. La magnitudo M di un terremoto secondo la scala Richter è data da:

$$M = \log_{10} \left(\frac{A}{A_0} \right)$$

Dove A rappresenta il massimo delle ampiezze registrate da un sismografo e A_0 è un'ampiezza di riferimento. Determina il rapporto $\frac{A_1}{A_2}$ tra le ampiezze prodotte dai due eventi sismici friulani.

(Dal quesito 3 di maturità 2026, liceo scientifico)