

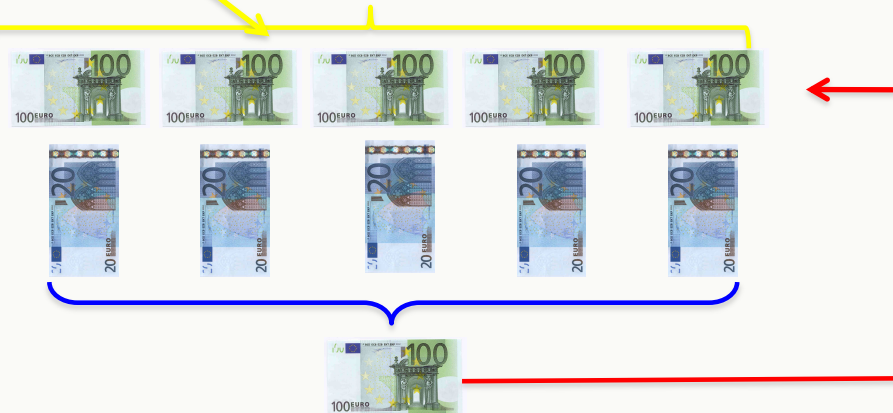
Un problema economico

Quanto aumenta una somma di denaro depositata in banca?

Un esempio

Deposito un capitale di 500 euro all'interesse composto annuo del 20%

20% significa
20 per ogni 100

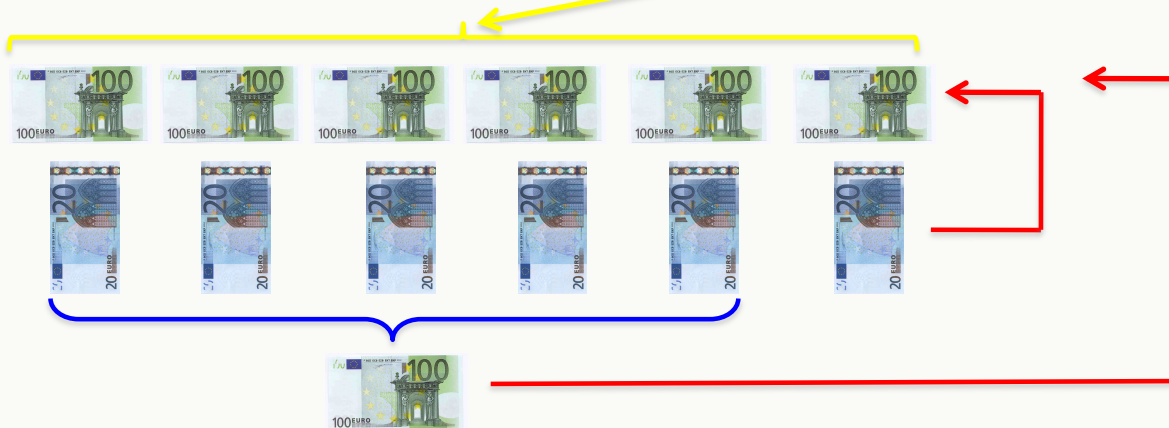


Alla fine del 1° anno la banca aggiunge 20 euro per ogni 100 euro depositati all'inizio dell'anno.
Quindi alla fine del 1° anno ho 600 euro.

Quanto aumenta una somma di denaro depositata in banca?

Un esempio

All'inizio del 2° anno lascio in banca 600 euro e riparte il calcolo del 20%



Alla fine del 2° anno la banca aggiunge 20 euro per ogni 100 euro depositati all'inizio dell'anno.

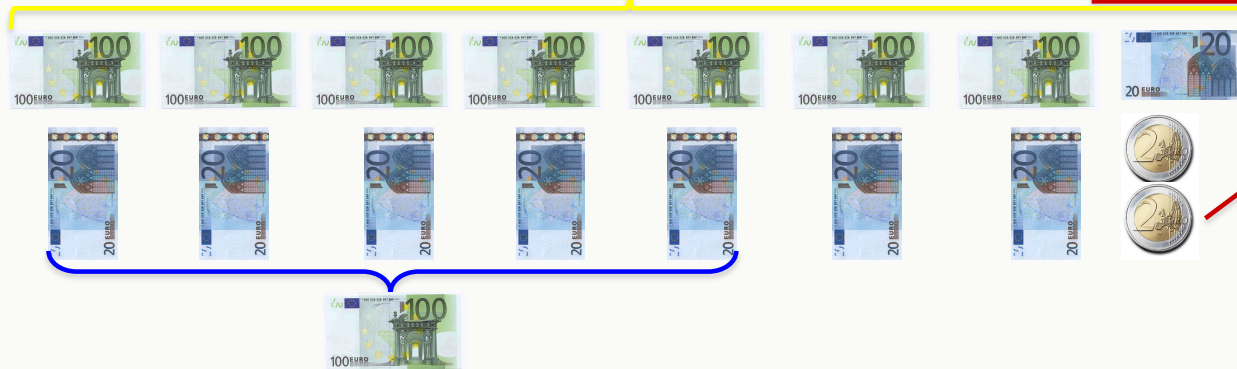
Quindi alla fine del 2° anno ho 720 euro.

Quanto aumenta una somma di denaro depositata in banca?

Un esempio

All'inizio del 3° anno lascio in banca 720 euro e riparte il calcolo del 20%.

$$20\% \text{ di } 20 = \frac{20}{100} \times 20 = 4$$



Quindi alla fine del 3° anno ho 864 euro.

Quanto aumenta una somma di denaro depositata in banca?

Un esempio

Ma potevo calcolare il capitale alla fine del 3° anno più rapidamente, senza contare le banconote. Ecco come si può ragionare.

Alla fine del 3° anno la banca aggiunge il 20% del capitale di 720€, depositato all'inizio dell'anno.

Perciò il capitale in euro diventa:

$$720 + \frac{20}{100} \times 720 = 720 + 0,2 \times 720 = 864$$

$$20\% \text{ di } 720 = \frac{20}{100} \times 720$$

$$\frac{20}{100} = 0,2$$

Quanto aumenta una somma di denaro depositata in banca?

L'esempio mette in luce le caratteristiche del processo di crescita di un capitale depositato in banca *all'interesse composto* del 20%:

- si lascia il capitale depositato in banca per qualche anno;**
- alla fine di ogni anno la banca aggiunge il 20% del capitale che trova all'inizio dell'anno.**

Ma una banca si basa su leggi matematiche per eseguire i calcoli con il computer. Come trovo la legge matematica per prevedere il capitale depositato in banca con interesse composto?

Legge di capitalizzazione a interesse composto

Legge di capitalizzazione a interesse composto

Tempo	Esempio numerico <i>Capitale iniziale: 5 centinaia di euro</i> <i>Tasso di interesse composto annuo:</i> $20\% = 20/100 = 0,2$	Procedimento generale <i>Capitale iniziale: A</i> <i>Tasso di interesse composto annuo: r</i>
Inizio	$C_0 = 5$	$C_0 = A$
Fine anno 1	$C_1 = 5 + 0,2 \times 5 = 5 \times (1 + 0,2)$	$C_1 = A + r A = A (1 + r)$
Fine anno 2	$C_2 = C_1 + 0,2 \times C_1 = C_1 (1 + 0,2) = 5 \times (1 + 0,2)^2$	$C_2 = C_1 + r C_1 = C_1 (1 + r) = A (1 + r)^2$
Fine anno 3	$C_3 = C_2 + 0,2 \times C_2 = C_2 (1 + 0,2) = 5 \times (1 + 0,2)^3$	$C_2 + r C_2 = C_2 (1 + r) = A (1 + r)^3$
Fine anno n	$C_n = 5 \times (1 + 0,2)^n$	<i>Legge di capitalizzazione</i> $C_n = A (1 + r)^n$

La legge di capitalizzazione risolve un problema

$$C_n = A(1 + r)^n$$

Oggi deposito in banca un capitale di 2000 euro all'interesse composto annuo del 3%. Quale capitale avrò fra 10 anni?

Nella legge sostituisco:

- **2000** al posto di **A**;
- $3\% = 3/100 = 0,03$ al posto di **r**;
- **10** al posto di **n**.

Svolgo i calcoli con la calcolatrice e trovo il seguente risultato arrotondato con due cifre decimali:

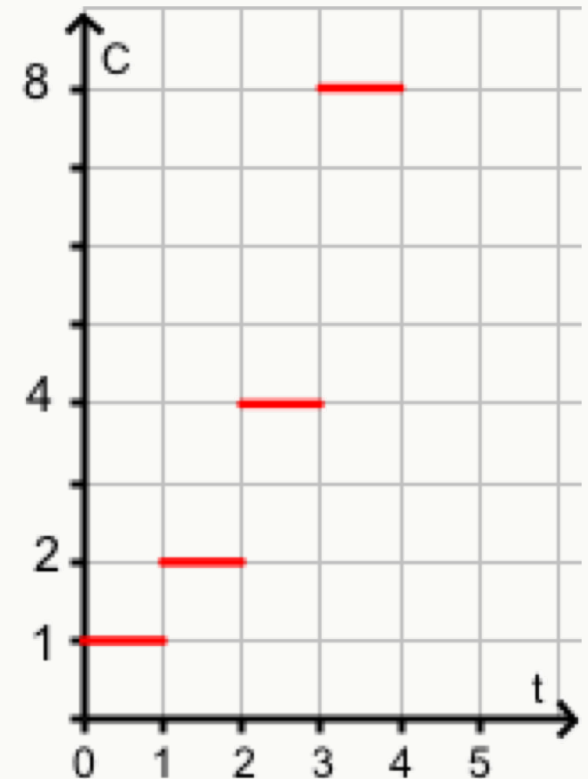
$$C_{10} = 2000 \times (1 + 0,03)^{10} \approx 2687,83.$$

Dunque fra 10 anni avrò un capitale di circa 2687,83 euro

Il grafico di una legge di capitalizzazione

Capitale iniziale di 1 migliaio di euro e interesse annuo 100% = 1.
Come aumenta il capitale al variare del tempo?

- $C = 1$ durante il tutto 1° anno e solo alla fine 'salta' al valore 2;
- $C = 2$ durante il tutto 2° anno e solo alla fine 'salta' al valore 4;
- $C = 4$ durante il tutto 3° anno e solo alla fine 'salta' al valore 8;
- e così via.
- Il tempo scorre con continuità e il capitale rimane in banca in ogni istante, ma cresce 'a salti'. A fianco il grafico corretto.



Un nuovo numero

Riprendo il capitale che cresceva 'a salti'

Capitale iniziale = 1

Interesse composto annuo = 100% = 1

Capitale alla fine del 1° anno = 2

Che cosa succede se la banca è disposta a frazionare l'interesse?

Vuol dire che la banca darà, ad esempio:

- **un interesse semestrale del 50% (2 volte l'anno);**
- **un interesse trimestrale del 25% (4 volte l'anno);**
- **e così via.**

Il capitale alla fine del 1° anno vale sempre 2?

Capitale C alla fine del 1° anno con interesse del 100% semestrale

a. Interesse semestrale: $50\% = \frac{1}{2}$

- fine 1° semestre: $C = 1 + \frac{1}{2}$

- fine 2° semestre: $C = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$

La fine del 2° semestre coincide con la fine del 1° anno; così ottengo un capitale C dato da:

$$C = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$$

Capitale C alla fine del 1° anno con interesse del 100% trimestrale

b. Interesse trimestrale: $25\% = \frac{1}{4}$

- fine 1° trimestre: $C = 1 + \frac{1}{4}$

- fine 2° trimestre: $C = \left(1 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2$

- fine 3° trimestre: $C = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^3$

- fine 4° trimestre: $C = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{4}\right)^3 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^3\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4$

La fine del 4° trimestre coincide con la fine del 1° anno; così ottengo un capitale C dato da: $C = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 \cong 2,441406$

Capitale C alla fine del 1° anno con interesse del 100% frazionato

Frazionamento dell'interesse	Interesse	Numero di volte n	Capitale alla fine del primo anno C
Annuo	1	1	$1 + 1 = 2$
Semestrale	$\frac{1}{2}$	2	$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$
Trimestrale	$\frac{1}{4}$	4	$\left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 \cong 2,441406$
Bimestrale	$\frac{1}{6}$	6	$\left(1 + \frac{1}{6}\right)^6 \cong 2,521626$
Giornaliero	$\frac{1}{365}$	365	$\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} \cong 2,714567$
	$\frac{1}{n}$	n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Capitale C alla fine del 1° anno con interesse del 100% frazionato

Osservazioni

**Quando n aumenta, l'interesse $1/n$ diventa sempre più piccolo, ma viene attribuito un numero sempre più grande di volte nell'anno: ogni ora, ogni minuto, ogni secondo...
E il capitale C aumenta, regolato dalla legge**

$$C = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Ma anche per n molto grande C non raggiunge 3; ad esempio:

$$\left(1 + \frac{1}{200000}\right)^{200000} \cong 2,718275$$

Il numero e

Un problema economico ha condotto ad una legge a lungo studiata nell'arco di più di un secolo, fra il 1600 e la metà del 1700, in particolare dai matematici Nepero ed Eulero.

$$C = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Se n diventa sempre più grande, C non si avvicina a 3, si avvicina invece a un numero decimale con, dopo la virgola, infinite cifre, che però non si ripetono con un periodo.

A questo numero **irrazionale** è stato dato il nome e , in onore di Eulero. Ecco qui sotto le prime 20 cifre decimali del numero e .

$$e \cong 2,71828\ 18284\ 59045\ 23536$$

Perché è importante il numero e

$$C = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Che cosa vuol dire ‘se n diventa sempre più grande’?

Vuol dire che, durante il 1° anno:

- aggiungo l’interesse un numero n grandissimo di volte (ogni minuto, ogni secondo, ogni millesimo di secondo...);
- però l’interesse $1/n$ diventa sempre più piccolo, quasi impercettibile.

La crescita diventa continua

Dunque il numero e è fondamentale per descrivere matematicamente processi di crescita continua.

Attività

**Completa la scheda di lavoro con
il supporto di un file Geogebra.**