

Esponenziale e logaritmo in base e

Dal tasso d'interesse annuo al tasso d'interesse continuo

Per risolvere gli esercizi da 1 a 4 ricorda che, se investi un capitale A con interesse annuo r frazionato in k parti. Il capitale C alla fine del 1° anno è dato da:

$$C = A \left(1 + \frac{r}{k}\right)^k$$

1. Un capitale $A = 1$ milione viene investito ad un tasso annuo d'interesse $r = 12\%$. Calcola il montante C alla fine del 1° anno nelle seguenti situazioni:
 - a. r viene scomposto in due parti uguali e gli interessi sono capitalizzati ogni semestre,
 - b. r viene scomposto in quattro parti uguali e gli interessi sono capitalizzati ogni trimestre,
 - c. r viene scomposto in dodici parti uguali e gli interessi sono capitalizzati ogni mese.
2. Ripeti l'esercizio precedente, considerando un tasso annuo d'interesse $r = 24\%$.
3. Ripeti l'esercizio 1, a partire da un capitale $A = 4$ milioni.
4. Ripeti l'esercizio 2, a partire da un capitale $A = 4$ milioni.

Per risolvere gli esercizi 5 e 6, ricorda: se investi per n anni un capitale A con interesse r frazionato in k parti uguali ed attribuito k volte l'anno, ottieni un montante C dato da:

$$C = A \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{nk}$$

5. Investi un capitale $A = 4$ milioni ad un tasso d'interesse annuo dell'8%, che viene valutato trimestralmente; calcola il montante C dopo 5 anni ed il montante C dopo 10 anni.
6. Si investe un capitale $A = 5$ milioni ad un tasso d'interesse annuo del 9%, che viene valutato ogni quadrimestre; calcola il tempo necessario a raddoppiare e a triplicare il capitale iniziale.
7. Un capitale $A = 1$ milione viene investito ad un tasso annuo d'interesse $r = 20\%$, che viene valutato trimestralmente; calcola il montante C alla fine del 1° anno. Calcola il tasso d'interesse R , che, valutato una sola volta durante l'anno, produrrebbe lo stesso montante C .
8. Ripeti l'esercizio precedente in generale per determinare il tasso annuo d'interesse R , che produce lo stesso montante di un interesse $\frac{r}{k}$, valutato k volte l'anno.

$$(Ottieni $R = \left(1 + \frac{r}{k}\right)^k - 1$)$$

Nelle condizioni descritte nell'esercizio 8, r prende il nome di *tasso nominale d'interesse convertibile k volte l'anno*, mentre R si chiama *tasso d'interesse annuo effettivo*.

Funzione esponenziale e logaritmica in base e con la calcolatrice

9. Usa il tasto e^x della calcolatrice per completare la seguente tabella con numeri con due cifre dopo la virgola. Traccia il grafico della funzione $y = e^x$

x	-2	-1	0	1	2	3
e^x						

10. Usa il tasto $\ln x$ della calcolatrice per completare la seguente tabella con numeri con due cifre dopo la virgola. Traccia il grafico della funzione $y = \ln x$.

x	0,1	0,5	0,8	1	2	3
$\ln x$						

Confronto logaritmo decimale con logaritmo naturale

11. A fianco trovi la proprietà del cambiamento di base dei logaritmi. Applica la proprietà per dimostrare che è vera, per qualunque numero a reale positivo, la seguente relazione fra logaritmi decimali e logaritmi naturali:

$$\ln a = \frac{\log a}{\log e}, \text{ ossia } \ln a = m \log a$$

Scrivi il valore approssimato del numero m con due cifre decimali.

4. Cambiamento dalla base b alla base c

$$\log_c x = \frac{\log_b x}{\log_b c}$$

12. Ripeti l'esercizio 11 per dimostrare la relazione seguente:

$$\log a = \frac{\ln a}{\ln 10}, \text{ ossia } \log a = p \ln a$$

Scrivi il valore approssimato del numero p con due cifre decimali.

Quale relazione lega il numero p al numero m , calcolato nell'esercizio precedente?

Usa la calcolatrice per completare le tabelle assegnate negli esercizi 13, 14, 15, 16 e confrontare i logaritmi decimali con quelli naturali

13.

x	1	10	100	1000	10^8	10^{20}	10^{50}	10^{99}
$\log x$								
$\ln x$								

14.

x	1	e	e^2	e^4	e^{10}	e^{50}	e^{100}	e^{227}
$\ln x$								
$\log x$								

15.

x	1	0,1	0,01	0.001	10^{-8}	10^{-20}	10^{-50}	10^{-99}
$\log x$								
$\ln x$								

16.

x	1	e^{-1}	e^{-2}	e^{-4}	e^{-10}	e^{-50}	e^{-100}	e^{-227}
$\ln x$								
$\log x$								

Problemi vari

I problemi proposti negli esercizi da 17 a 23 sono tratti dai campi più vari della scienza e della tecnica e conducono ad applicare le nozioni relative ad esponenziale e logaritmo per risolvere problemi reali.

Problemi guidati

17. Un gruppo di psicologi studiano la diffusione di un pettegolezzo all'interno di un gruppo circoscritto di persone, come ad esempio gli studenti di una scuola, e trovano la seguente legge:

$$F = 1 - e^{kt}$$

dove

- t è il tempo misurato in giorni;
- k è una costante che dipende da vari fattori, fra i quali la verosimiglianza del pettegolezzo;
- F è la frazione di persone che conoscono il pettegolezzo dopo t giorni.

Rispondi ai seguenti quesiti e, quando esegui i calcoli con il tascabile, scrivi il risultato arrotondato con 2 cifre dopo la virgola.

- a. Uno psicologo mette in circolazione un pettegolezzo in una scuola e rileva che, dopo 3 giorni, il 40% degli studenti conosce il pettegolezzo; quanto vale la costante k in questo esperimento?
- b. Applica la legge per prevedere la frazione F di studenti che conosce il pettegolezzo dopo 6 giorni.

a. Sostituisco i dati nella formula e ottengo:

$$0,4 = 1 - e^{3k}$$

Sottraggo 1 ai due membri ed eseguo le operazioni indicate, così ottengo:

$$-0,6 = \dots\dots \text{ da cui } 0,6 = \dots\dots$$

Per esplicitare k applico la definizione di logaritmo naturale ed eseguo i calcoli col tascabile:

$$3k = \dots\dots \text{ da cui } k = \dots\dots \cong -0,17$$

b. Sostituisco i dati nella formula ed eseguo i calcoli col tascabile; così ottengo:

$$F = 1 - \dots\dots \cong \dots\dots = 64\%$$

18. Un test psicologico chiede di memorizzare una lista di parole prive di senso; alcuni psicologici hanno somministrato questo test a un numeroso gruppo di persone e hanno trovato la seguente legge:

$$F = 1 - k \ln(t + 1) \quad \text{con} \quad \ln(t + 1) = \log_e(t + 1)$$

dove

- t è il tempo misurato in ore;
- k è una costante che dipende da vari fattori, fra i quali la lunghezza della lista di parole;
- F è la frazione di persone che ricordano tutte le parole della lista dopo t ore.

Rispondi ai seguenti quesiti.

- a. Uno psicologo propone il test a un gruppo di persone e rileva che, dopo 3 ore, solo la metà ricorda l'intero elenco; quanto vale la costante k in questo esperimento?
- b. Basati sulla legge per prevedere la frazione F di persone che ricorderà l'intero elenco dopo 6 ore. Quando esegui i calcoli con il tascabile, scrivi il risultato arrotondato con 2 cifre dopo la virgola.

a. Sostituisco i dati nella formula e ottengo:

$$0,5 = \dots\dots$$

Sottraggo 1 ai due membri ed eseguo le operazioni indicate, così ottengo:

$$-0,5 = \dots\dots$$

Per esplicitare k divido i due membri per $-\ln 4$ ed eseguo i calcoli col tascabile:

$$k = \dots\dots \cong 0,36$$

b. Sostituisco i dati nella formula ed eseguo i calcoli col tascabile; così ottengo:

$$F = 1 - \dots\dots \cong \dots\dots = 30\%$$

Risolvi i seguenti problemi

19. Intorno alla metà del 1800, i fisici tedeschi G. Fechner e E. Weber hanno studiato le reazioni dell'organismo umano sottoposto ad uno stimolo fisico, come ad esempio un suono, una luce, Così hanno trovato che l'intensità S della sensazione aumenta all'aumentare dell'intensità P dello stimolo, ma S non è proporzionale a P ; vale invece, in prima approssimazione, la legge:

$$S = \ln \frac{P}{P_0}$$

dove P_0 è l'intensità di soglia dello stimolo fisico, cioè la massima intensità P che produce $S = 0$.

Il più piccolo peso che una persona riesce a percepire è $P_0 = 0,5$ grammi; calcola il rapporto fra le sensazioni S_1 ed S_2 , corrispondenti ai pesi $P_1 = 10$ g e $P_2 = 100$ g.

20. In un'industria alimentare un pezzo di carne, che si trova a temperatura ambiente, viene messo in frigorifero e gradualmente si raffredda, secondo la seguente legge:

$$T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{kt}$$

dove

- T è la temperatura variabile della carne, misurata in gradi centigradi ($^{\circ}\text{C}$);
- t è il tempo, misurato in ore;
- T_0 è la temperatura ambiente e T_1 è la temperatura all'interno del frigorifero;
- k è una costante che dipende anche dal tipo di carne.

- a. La temperatura ambiente è di 30° e la temperatura del frigorifero è 5° ; la temperatura della carne dopo 1 ora di permanenza nel frigorifero vale 20° ; quanto vale k ?
- b. Quale sarà la temperatura della carne dopo 2 ore?

21. Gli altimetri sono basati sul fatto che all'aumentare della quota h diminuisce la pressione atmosferica p , che dipende anche dalla temperatura T secondo la legge seguente:

$$h = (30T + 8000) \ln \frac{p_0}{p}$$

dove

- la quota h è misurata in metri e T è la temperatura, misurata in gradi centigradi ($^{\circ}\text{C}$);
 - la pressione p è misurata in hPa e p_0 è la pressione al livello del mare ($p_0 \cong 100$ hPa);
- a. Durante una scalata del monte Everest, due alpinisti rilevano una temperatura $T = -13^{\circ}$ e una pressione $p = 35$ hPa. A quale quota si trovano i due scalatori?
- b. Una guida alpina rileva una quota $h = 8090$ e una temperatura $T = -30^{\circ}$; a quale pressione atmosferica si trova la guida?

22. Il passaggio di corrente in un solenoide è regolato dalla seguente legge:

$$i = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

dove

- E è la tensione applicata al solenoide, misurata in Volt;
 - i è l'intensità di corrente misurata in milliampère;
 - t è il tempo misurato in millisecondi.
- a. Quale corrente ottengo dopo un tempo $t = 4$ ms, se applico una tensione $E = 8$ V?
- b. Quale tensione bisogna applicare per avere una corrente $i = 10$ mA, dopo un tempo $t = 2$ ms?

- 23.** La resistività r di un semiconduttore varia al variare della temperatura assoluta T secondo la legge:

$$r = Ae^{\frac{B}{T}}$$

dove r è misurata in ohm per metro e T è misurata in gradi Kelvin.

Le misure su un campione di silicio, che è un semiconduttore, hanno dato i risultati qui a fianco.

T	r
273	1,8
293	0,6

- Calcola il valore dei coefficienti A e B .
- Basati sulla legge per prevedere la resistività r del silicio alla temperatura $T = 353^\circ\text{K}$.