

Un primo processo di crescita continua

Riprendo il numero e

Il numero e è legato a un problema economico:

- Capitale iniziale depositato in banca = 1
- Interesse composto annuo = 100% = 1, frazionato n volte
- Il capitale C alla fine del 1° anno è dato da:

$$C = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Se n diventa sempre più grande, la crescita diventa continua e C si avvicina al numero irrazionale e , che ha le prime 20 cifre decimali date da:

$$e \approx 2,71828\ 18284\ 59045\ 23536$$

Posso sintetizzare questo risultato con la scrittura seguente:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \quad \text{se } n \text{ diventa sempre più grande}$$

«tende a»

Studio un capitale che cresce con continuità

**In questo processo di crescita continua si può calcolare il capitale C non solo alla fine dell'anno, ma anche alla fine del 1° semestre o del 1° trimestre...?
Ecco un esempio per cercare la risposta.**

Capitale C alla fine del 1° semestre con interesse del 100% frazionato

a. Interesse 50% = 50/100 = 0,5 semestrale

fine 1° semestre: $C = 1 + 0,5 = 1,5$

b. Interesse $\frac{0,5}{2}$ trimestrale

- fine 1° trimestre: $C = 1 + \frac{0,5}{2}$

- fine 2° trimestre: $C = \left(1 + \frac{0,5}{2}\right) + \frac{0,5}{2} \left(1 + \frac{0,5}{2}\right) = \left(1 + \frac{0,5}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{0,5}{2}\right) = \left(1 + \frac{0,5}{2}\right)^2$

**La fine del 2° trimestre coincide con la fine del
1° semestre; così ottengo un capitale C dato da:**

$$C = \left(1 + \frac{0,5}{2}\right)^2 = 1,5625$$

Capitale C alla fine del 1° semestre con interesse del 100% frazionato

Capisco come posso continuare:

Frazionamento dell'interesse	Interesse	Numero di volte m	Capitale alla fine del primo anno C
Semestrale	0,5	1	$1 + 0,5 = 1,5$
Trimestrale	$\frac{0,5}{2}$	2	$\left(1 + \frac{0,5}{2}\right)^2 = 1,5625$
Bimestrale	$\frac{0,5}{3}$	3	$\left(1 + \frac{0,5}{3}\right)^3 \cong 1,58796$
Mensile	$\frac{0,5}{6}$	6	$\left(1 + \frac{0,5}{6}\right)^6 \cong 1,61649$
	$\frac{0,5}{m}$	m	$\left(1 + \frac{0,5}{m}\right)^m$

Che cosa succede se la crescita diventa continua?

- Ricordo che $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$ se n diventa sempre più grande
- Confronto $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ con $\left(1 + \frac{0,5}{m}\right)^m$
- Osservo che le espressioni ‘si somigliano’, ma trovo: $\frac{0,5}{m}$ al posto di $\frac{1}{n}$
- Le due espressioni diventano uguali, se scelgo: $\frac{0,5}{m} = \frac{1}{n}$ da cui ricavo $m = 0,5n$
- Così ottengo:

$$\left(1 + \frac{0,5}{m}\right)^m = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{0,5n} = \underbrace{\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{0,5}}$$

Applico la proprietà di potenza di potenza

**Se la crescita diventa continua,
il capitale C alla fine del 1°
semestre è dato da:**

$$C = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{0,5} \rightarrow e^{0,5} \text{ se } n \text{ diventa molto grande}$$

Che cosa succede se la crescita diventa continua?

Ho così un procedimento per calcolare il capitale C alla fine del I anno (1 anno), del I semestre (0,5 anni), del I trimestre (0,25 anni)... Ecco che cosa ottengo:

$$t = 1 \quad C = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \quad \text{se } n \text{ diventa sempre più grande}$$

$$t = 0,5 \quad C = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{0,5} \rightarrow e^{0,5} \quad \text{se } n \text{ diventa sempre più grande}$$

$$t = 0,25 \quad C = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{0,25} \rightarrow e^{0,25} \quad \text{se } n \text{ diventa sempre più grande}$$

.....

$$\text{Al variare di } t \quad C = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^t \rightarrow e^t \quad \text{se } n \text{ diventa sempre più grande}$$

t tempo misurato in anni

La funzione esponenziale in base e

Un particolare processo di crescita continua:

- Capitale iniziale depositato = 1
- Tasso di interesse annuo = 1 (frazionato in modo continuo)

Ecco la legge che descrive la crescita continua del capitale C al variare del tempo t :

$$C = e^t$$

Questo ed altri problemi di crescita continua hanno condotto ad introdurre in matematica la funzione esponenziale in base e :

$$y = e^x$$

Attenzione! Una larga parte dei software più comuni indicano la funzione esponenziale in base e con il simbolo $\exp(x)$.

Il grafico della funzione esponenziale in base e

$$y = e^x$$

Dominio: i numeri reali, perciò x può essere irrazionale;

Codominio: i numeri reali, perciò y può essere irrazionale;

La base e è un numero irrazionale.

E il grafico?

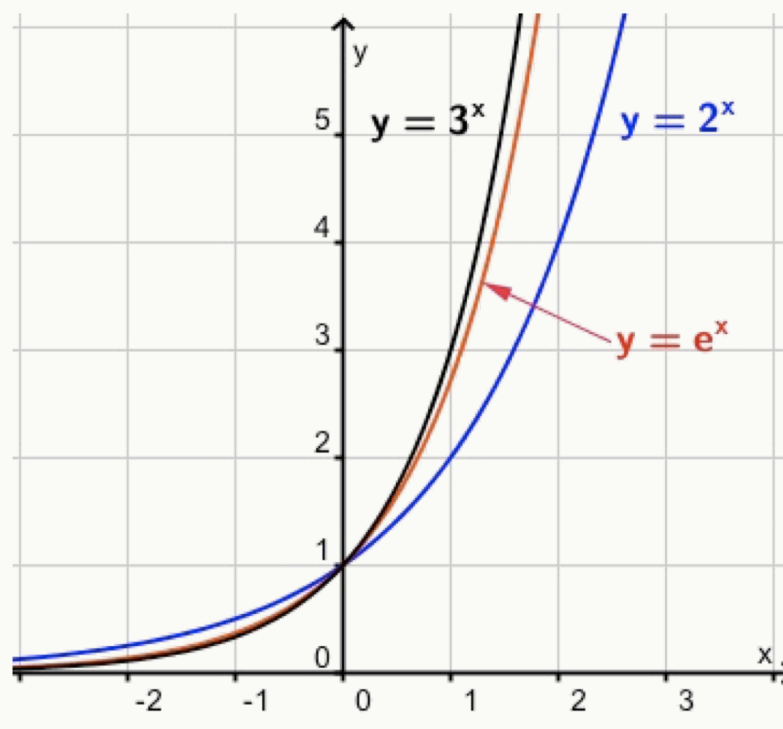
Risulta

$$2 < e < 3$$

Perciò troveremo

$$2^x < e^x < 3^x$$

Come mostra il grafico a fianco tracciato con un software di geometria dinamica.



Il logaritmo in base e

Ecco la funzione inversa di $y = e^x$:

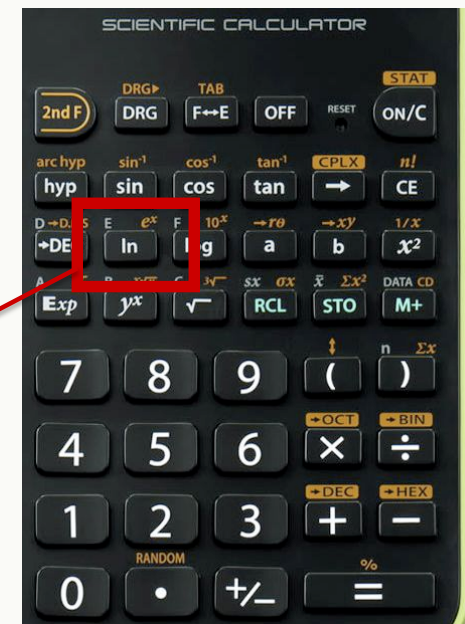
$$x = e^y \Leftrightarrow y = \log_e x$$

Tradizionalmente, il logaritmo in base e prende il nome di *‘logaritmo naturale’*, abbreviato spesso con *‘lnx’*.

$$y = \log_e x \Leftrightarrow y = \ln x$$

Ma la nomenclatura non è del tutto unificata:

- sulla tastiera dei tascabili e nella maggior parte dei software più comuni si trova lnx;
- in alcuni testi di matematica si trova logx.



Il grafico del logaritmo in base e

La funzione inversa di $y = e^x$ si scrive nella forma:

$$x = e^y \Leftrightarrow y = \ln x$$

Dominio: i numeri reali positivi, perciò x può essere irrazionale;

Codominio: i numeri reali, perciò y può essere irrazionale;

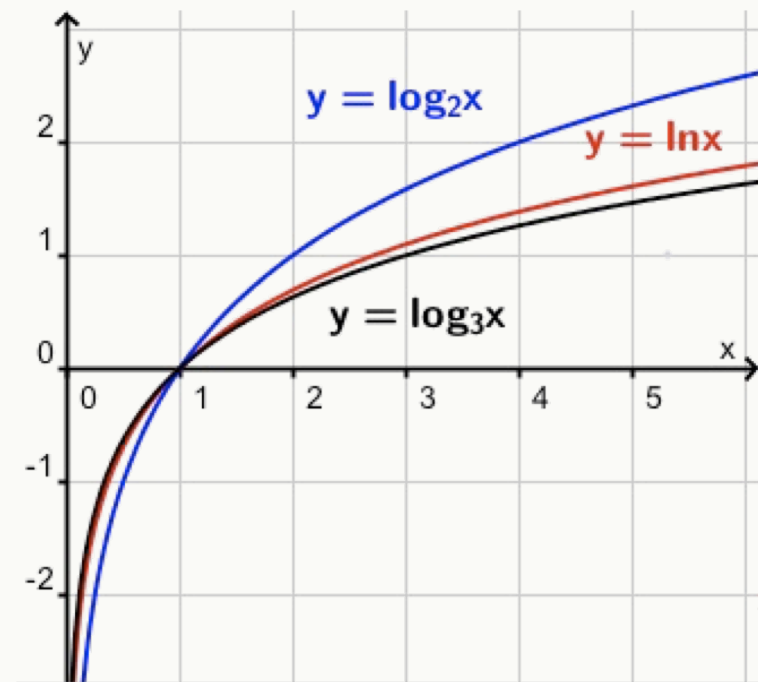
La base e è un numero irrazionale.

E il grafico?

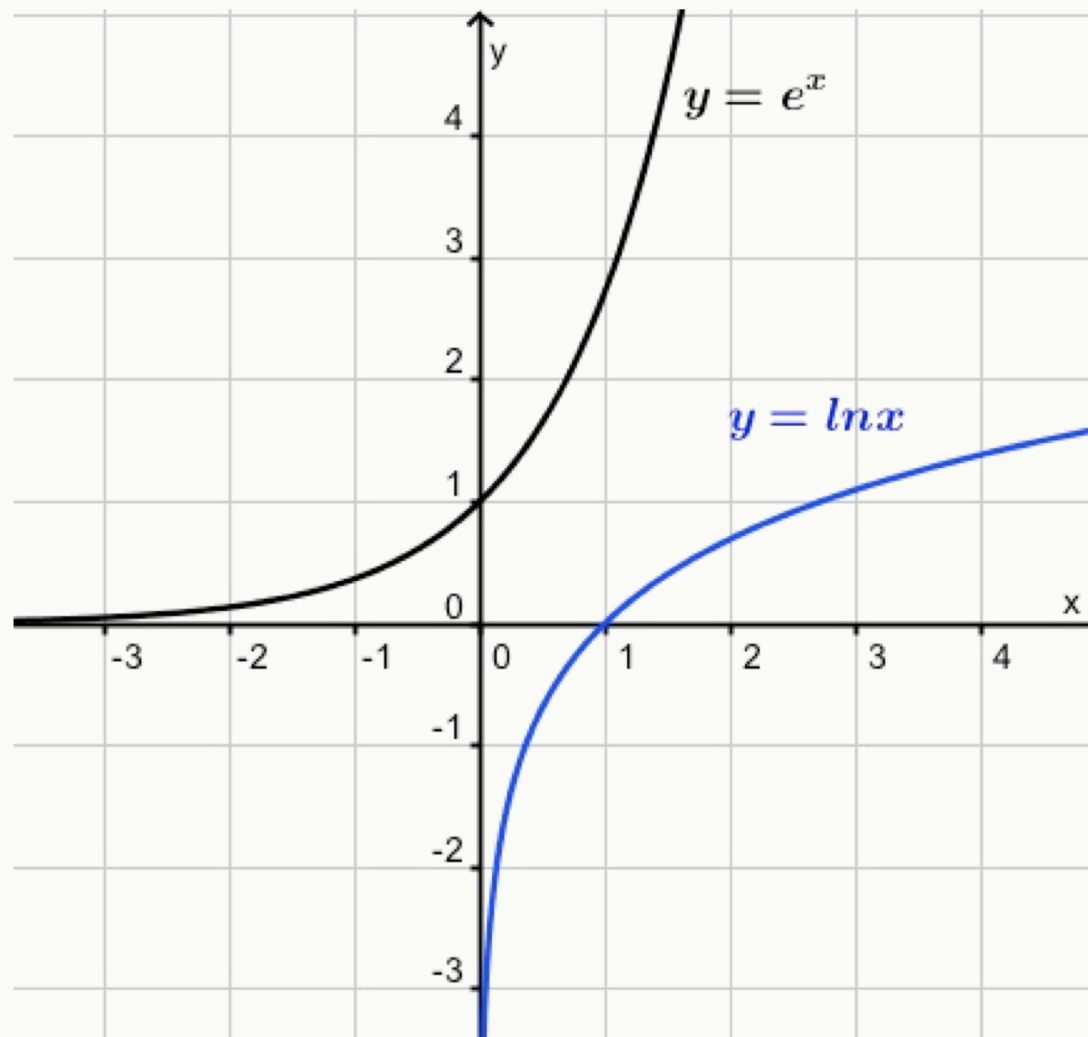
Ora trovo

$$\log_3 x < \ln x < \log_2 x$$

come mostra il grafico a fianco
tracciato con un software di
geometria dinamica.



Grafici di esponenziale e logaritmo in base e



Problemi di crescita e decrescita continua

Legge che descrive un particolare processo di crescita continua

$$C = e^t$$

- **Capitale iniziale depositato = 1**
- **Tasso di interesse annuo 100% = 1**
(frazionato in modo continuo)

**Vediamo ora come descrivere situazioni più
generali di crescita continua.**

Verso un più generale processo di crescita continua

<i>Tasso di interesse annuo $r = 100\% = 1$</i> <i>Capitale iniziale $A = 4$</i>	<i>Capitale iniziale $A = 1$</i> <i>Tasso di interesse annuo $r = 20\% = 0,2$</i>
• $t = 1$ anno: $C = 4\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow 4e$ • $t = 0,5$ anni: $C = 4\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{0,5} \rightarrow 4e^{0,5}$ • al variare del tempo t, la legge è $C = 4e^t$	• $t = 1$ anno: $C = \left(1 + \frac{0,2}{m}\right)^m = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{0,2} \rightarrow e^{0,2}$ • $t = 0,5$ anni: $C = \left(1 + \frac{0,2 \cdot 0,5}{m}\right)^m = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{0,2 \cdot 0,5} \rightarrow e^{0,2 \cdot 0,5}$ • al variare del tempo t, la legge è $C = e^{0,2t}$
<i>Capitale iniziale $A = 4$</i> <i>Tasso di interesse annuo $r = 0,2$, frazionato in modo continuo</i>	
Il capitale C cresce al variare del tempo t secondo la legge $C = 4e^{0,2t}$	

La crescita continua di un capitale è remota dalla realtà, ma fa capire che processi di crescita continua sono descritti da funzioni esponenziali del tipo: $y = Ae^{rx}$ con $A > 0$ e $r > 0$

Un processo di decrescita continua

Deposito un capitale $A = 1$ e, per pagare un mutuo, incarico la banca di **togliere** alla fine dell'anno il **20%** del capitale depositato. Poi l'interesse viene frazionato ...

Tasso di interesse annuo $r = 20\% = 0,2$

Capitale iniziale $A = 1$

$$\bullet t = 1 \text{ anno: } C = \left(1 - \frac{0,2}{m}\right)^m = \left[1 + \frac{(-0,2)}{m}\right]^m = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-0,2} \rightarrow e^{-0,2}$$

$$\bullet t = 0,5 \text{ anni: } C = \left(1 - \frac{0,2 \cdot 0,5}{m}\right)^m = \left[1 + \frac{(-0,2) \cdot 0,5}{m}\right]^m = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-0,2 \cdot 0,5} \rightarrow e^{-0,2 \cdot 0,5}$$

• al variare del tempo t , la legge è

$$C = e^{-0,2t}$$

Più in generale i processi di decrescita continua sono descritti da funzioni esponenziali del tipo:

$$y = Ae^{rx} \quad \text{con } A > 0 \text{ e } r < 0$$

Una sola legge per descrivere processi di crescita o decrescita continua

$$y = Ae^{rx} \text{ con } A > 0$$



$$r > 0$$

Crescita continua

$$r < 0$$

Decrescita continua

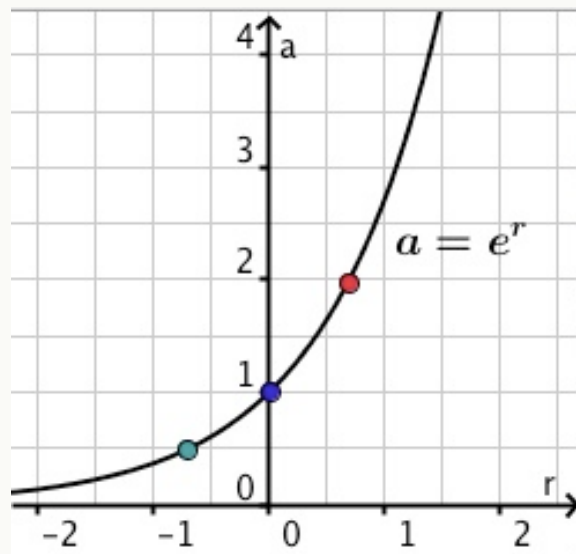
Collegamento fra $y = a^x$ e $y = e^{rx}$

Applico la proprietà di potenza di potenza, perciò
al posto di $y = e^{rx}$, scrivo $y = (e^r)^x$

Ho scritto una funzione esponenziale con base $b = e^r$

Così trovo che:

- se $r > 0$, risulta $a > 1$ e quindi ho un esponenziale crescente;
- se $r < 0$, risulta $0 < a < 1$ e quindi ho un esponenziale decrescente;
- se $r = 0$, risulta $a = 1$ e quindi ho la retta d'equazione $y = 1$.



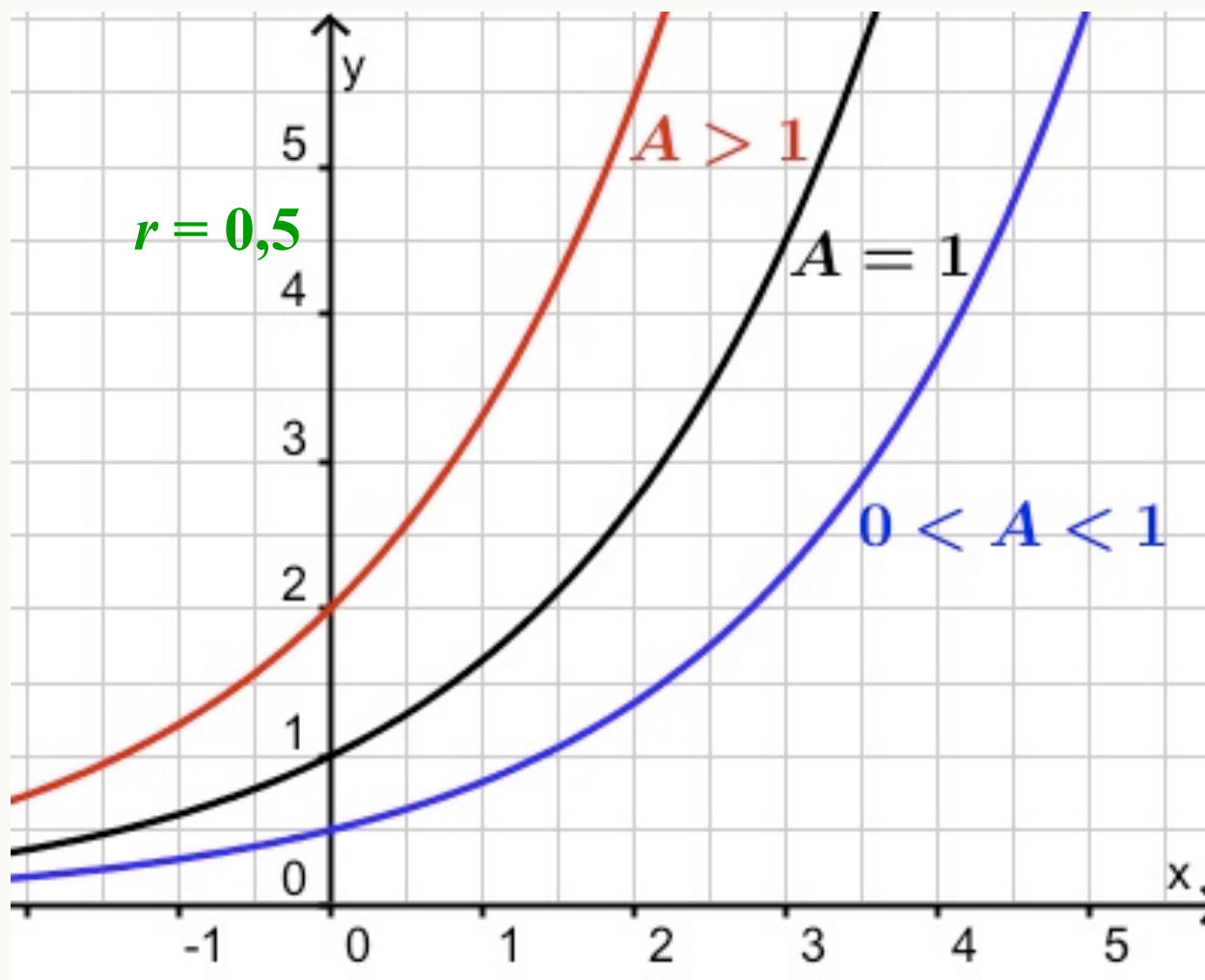
Attività

Processi di crescita o decrescita continua

**Completa la scheda 1 di lavoro per rivedere
e consolidare quello che hai imparato in
questa presentazione.**

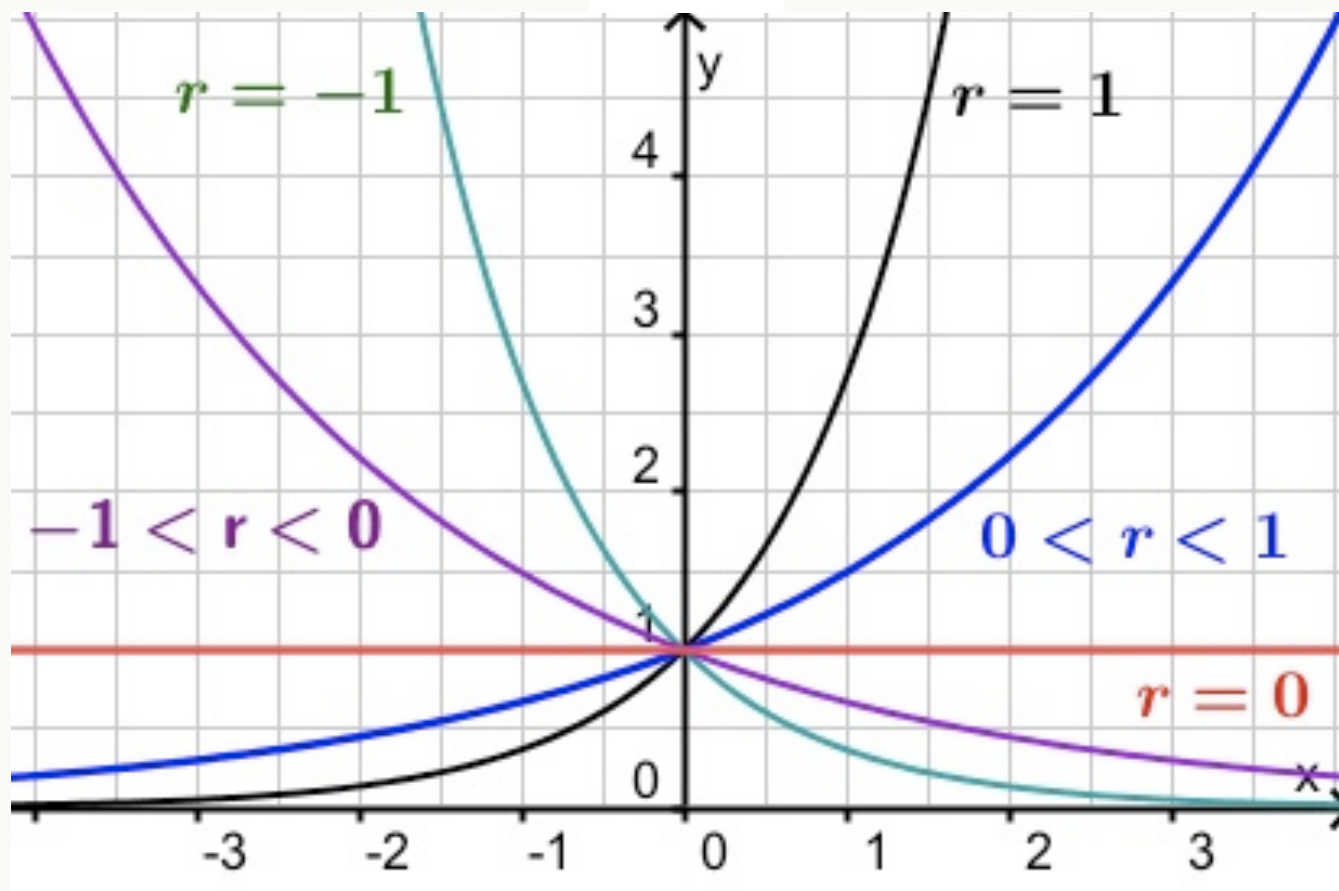
Che cosa hai trovato. Riflessioni sui grafici

Andamento delle funzioni del tipo $y = Ae^{rx}$



Andamento delle funzioni del tipo $y = Ae^{rx}$

$$A = 1$$



Risolvere problemi

Per completare quanto proposto da questa presentazione puoi lavorare con la scheda 2 per risolvere vari problemi basati su leggi esponenziali e logaritmiche in base e .

Suggerimenti per risolvere problemi

I procedimenti sono analoghi a quelli seguiti per risolvere problemi con esponenziali e logaritmi in base 10.

Avvertenze nei calcoli con il tascabile:

- usa il tasto e^x per calcolare l'esponenziale in base e ;
- usa il tasto $\ln x$ per calcolare il logaritmo in base e .