

Quesiti riassuntivi. Esercizi

Equazioni esponenziali

Prendono il nome di equazioni esponenziali le equazioni che presentano l'incognita come esponente di uno o più numeri fissi.

Risolvi le equazioni date negli esercizi da 1 a 5.

1. $5^{2x-1} = 25$; $2^{2-8x} = 16$; $3^{x+3} = 81$

Esercizio svolto:

Puoi scrivere la prima equazione nella seguente forma.

$$5^{2x-1} = 5^2$$

così è chiaro che le due potenze della stessa base 5 sono uguali solo se sono uguali gli esponenti. Deve dunque risultare:

$$2x - 1 = 2, \text{ da cui } x = \frac{3}{2}.$$

2. $4^{x+2x} = 1$; $7^{-x+4} = 1$; $6^{x+x} = 36$.

Suggerimento: tieni presente che risulta $1 = a^0$, per qualunque base $a \neq 0$

3. $3^{x^2-2x} = 9^{x^2-4}$; $4^{x^2-1} = \frac{4^x}{4^{x^2}}$; $25 \cdot 5^{x^2-2} = 5^{4x^2}$.

Suggerimento: per ricondursi ad un'equazione del tipo già risolto negli esercizi 1 e 2 bisogna applicare le proprietà delle potenze

4. $2^{x+2} = 5^{1-x}$; $5^{2x+1} = 4^{2-x}$; $4^{3x+3} = 5^{x+1}$.

Esercizio svolto

In questi esercizi non si trovi più due potenze della stessa base; per risolvere le equazioni è opportuno calcolare il logaritmo decimale dei due membri e applicare le proprietà dei logaritmi. Per la prima equazione trovi:

$$(x+2)\log 2 = (1-x)\log 5, \text{ da cui } x\log 2 + 2\log 2 = \log 5 - x\log 5 \text{ e quindi}$$

$$x(\log 2 + \log 5) = \log 5 - 2\log 2. \text{ Applico le proprietà dei logaritmi e trovo:}$$

$$x\log 10 = \log \frac{5}{4} \text{ e infine } x = \log \frac{5}{4} \cong 0,097$$

5. $4^{2x+1} = 6^x$; $3^{2x-1} = 2^{3x}$; $7,27^{x-1} = 8,97^x$

Proprietà delle potenze

Potenza di potenza

$$(a^m)^p = a^{m \cdot p}$$

Prodotto di potenze con la stessa base

$$a^m \cdot a^p = a^{m+p}$$

Prodotto di potenze con lo stesso esponente

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

Quoziente di potenze con la stessa base

$$a^m : a^p = a^{m-p}$$

Quoziente di potenze con lo stesso esponente

$$a^n : b^n = (a:b)^n$$

Le proprietà dei logaritmi

1. Logaritmo di una potenza

$$\log_b x^p = p \log_b x$$

2. Logaritmo di un prodotto

$$\log_b (xy) = \log_b x + \log_b y$$

3. Logaritmo di un quoziente

$$\log_b (x : y) = \log_b x - \log_b y$$

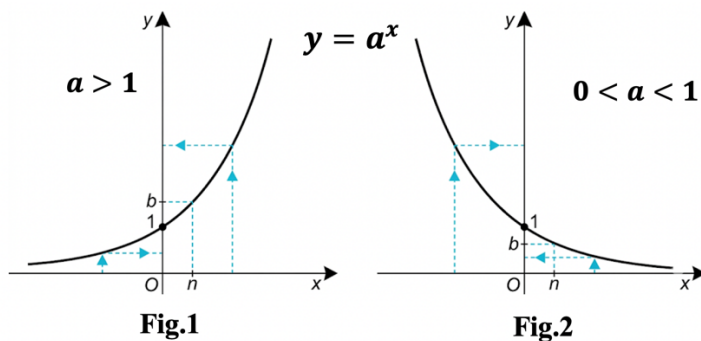
4. Cambiamento dalla base b alla base c

$$\log_c x = \frac{\log_b x}{\log_b c}$$

Disequazioni esponenziali

Prendono il nome di disequazioni esponenziali le disequazioni che presentano l'incognita come esponente di uno o più numeri fissi.

Per risolvere queste disequazioni è opportuno basarsi sulle curve esponenziali, rappresentate qui sotto.



Disequazioni elementari

$a^x \geq b$ oppure $a^x \leq b$.

È opportuno distinguere due casi:

I) $a > 1$.

Si ha una curva esponenziale crescente, perciò se n è il numero tale che

$$a^n = b$$

risulta (fig. 1):

$$\begin{aligned} a^x &\geq b && \text{per } x \geq n \\ a^x &\leq b && \text{per } x \leq n. \end{aligned}$$

II) $a < 1$.

Si ha una curva esponenziale decrescente, perciò se n è il numero tale che

$$a^n = b,$$

risulta (fig. 2):

$$\begin{aligned} a^x &\geq b && \text{per } x \leq n \\ a^x &\leq b && \text{per } x \geq n. \end{aligned}$$

6. Risolvi le seguenti disequazioni

$$2^x \leq 64; \quad 2^x > 64$$

Esercizio svolto

La base dell'esponenziale è $2 > 1$.

Risulta $2^6 = 64$, perciò $x = 6$

Le soluzioni delle disequazioni sono:

$$2^x \leq 64 \Rightarrow x \leq 6 \quad \text{e} \quad 2^x > 64 \Rightarrow x > 6$$

7. Risolvi le seguenti disequazioni

$$3^x \geq 27; \quad 3^x < 27; \quad 3^{-x} \geq 27; \quad 3^{-x} < 27.$$

8. Risolvi le seguenti disequazioni

$$4^x \geq 0,5; \quad 4^x < 0,5; \quad 4^{-x} \geq 0,5; \quad 4^{-x} < 0,5.$$

9. Risolvi le seguenti disequazioni

$$0,5^x \geq 8; \quad 0,5^x < 8; \quad 0,5^{-x} \geq 8; \quad 0,5^{-x} < 8$$

10. Risolvi le seguenti disequazioni

$$0,1^x \geq 100; \quad 0,1^x < 100; \quad 0,1^{-x} \geq 100; \quad 0,1^{-x} < 100.$$

Equazioni logaritmiche

Prendono il nome di equazioni logaritmiche le equazioni che presentano l'incognita come argomento di logaritmi.

Risolvi le equazioni presentate negli esercizi da 11 a 15.

11. $\log(2x - 4) = \log(1 - x); \quad \log(x + 1) = \log(2x - 2); \quad \log_3(4 - x^2) = \log_3(x^2 - 2x).$

Esercizio svolto

La risoluzione delle equazioni è basata sulla seguente proprietà: due logaritmi nella stessa base risultano uguali solo se sono uguali gli argomenti

Per risolvere la prima equazione deve risultare:

$$2x - 4 = 1 - x, \text{ da cui } x = \frac{5}{3}$$

Ora è importante ricordare che non esiste il logaritmo di zero o di un numero negativo, perciò occorre sempre verificare che la soluzione sia valida sostituendo il numero ottenuto alla x .

Nell'equazione ora risolta sostituisco $\frac{5}{3}$ alla x e ottengo

$$\text{I membro: } \log\left(\frac{10}{3} - 4\right) = \log\left(-\frac{2}{3}\right) \text{ privo di significato}$$

$$\text{II membro: } \log\left(1 - \frac{5}{3}\right) = \log\left(-\frac{2}{3}\right) \text{ privo di significato}$$

Così trovi che $\frac{5}{3}$ rende uguali gli argomenti dei due logaritmi, come doveva essere; però la soluzione ottenuta non è valida, perché rende negativi i due argomenti.

Così concludi che l'equazione assegnata non ha soluzioni: è impossibile.

12. $\log x + \log(x^2 - 2) = \log(4x - x^3); \quad \log x + \log(x + 1) = 2\log(1 - x).$

Suggerimento. Per ricondurre le equazioni alla forma esaminata nell'esercizio 11 bisogna applicare le proprietà dei logaritmi (richiamate a pag. 1). Così scrivi la prima equazione nella forma seguente:

$$\log(x^3 - 2x) = \log(4x - x^3)$$

13. $\log(x + 3) - \log x = \log 8 - \log(x + 1); \quad \log x - \log(x - 1) = 2\log x - \log(x + 3).$

Suggerimento: per ricondurre le equazioni alla forma esaminata nell'esercizio 11 bisogna applicare le proprietà dei logaritmi

14. $\log_2(2x - 3) = \log_4(3x^2 - 10x + 12); \quad \log_2(2x - 3) = \log_{\frac{1}{2}}(x - 1).$

Suggerimento: per ricondurre le equazioni alla forma esaminata nell'esercizio 11, bisogna applicare anche il cambiamento di base (pag. 1).

15. $\log_2(x + 3) = \log_4(15x + x^2) - \log_4 x; \quad \log(x + 1) + \log_{0,1}(x - 1) = \log 2.$

Disequazioni logaritmiche

Prendono il nome di disequazioni logaritmiche le disequazioni che presentano l'incognita come argomento di uno o più logaritmi.

Per risolvere queste disequazioni è opportuno basarsi sulle curve logaritmiche, rappresentate qui sotto.

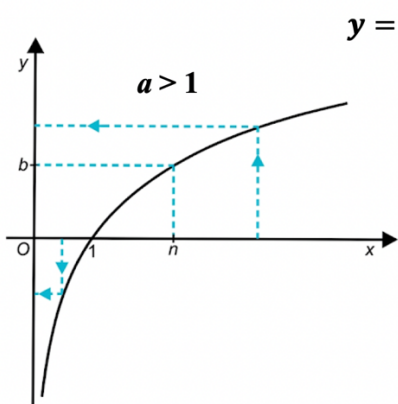


Fig. 3

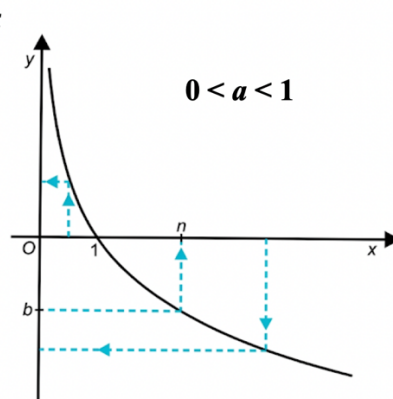


Fig. 4

Disequazioni elementari

$$\log_a x \geq b \text{ oppure } \log_a x \leq b$$

opportuno distinguere due casi:

I) $a > 1$.

Si ha una curva logaritmica crescente, perciò se n è il numero tale che

$$\log_a n = b$$

Risulta (fig. 3):

$$\begin{array}{ll} \log_a x \geq b & \text{per } x \geq n \\ \log_a x \leq b & \text{per } x \leq n. \end{array}$$

II) $a < 1$.

Si ha una curva logaritmica decrescente, perciò se n è il numero tale che

$$\log_a n = b,$$

risulta (fig. 4):

$$\begin{array}{ll} \log_a x \geq b & \text{per } x \leq n \\ \log_a x \leq b & \text{per } x \geq n. \end{array}$$

Esercizio svolto

16. Risolvi le seguenti disequazioni:

$$\log_2 x \geq 3, \quad \log_2 x < 3$$

La base del logaritmo è $2 > 1$.

Risulta $\log_2 8 = 3$, perciò $x = 8$

Le soluzioni delle disequazioni sono:

$$\log_2 x \geq 3 \Rightarrow x \geq 8 \quad \text{e} \quad \log_2 x < 3 \Rightarrow x < 8$$

17. Risolvi le seguenti disequazioni

$$\log_3 x \geq -0,5; \quad \log_3 x < -0,5; \quad \log_3 x \geq 0,5; \quad \log_3 x < 0,5$$

18. Risolvi le seguenti disequazioni

$$\log_{10} x \geq 2, \log_{10} x < 2; \quad \log_{10} x \geq -0,25; \quad \log_{10} x < -0,25.$$

19. Risolvi le seguenti disequazioni

$$\log_{\frac{1}{3}} x \geq -1; \quad \log_{\frac{1}{3}} x < -1; \quad \log_{\frac{1}{3}} x \geq 1; \quad \log_{\frac{1}{3}} x < 1.$$

20. Risolvi le seguenti disequazioni

$$\log_{\frac{3}{4}} x \geq -2; \quad \log_{\frac{3}{4}} x < -2; \quad \log_{\frac{3}{4}}^3 x \geq 0,5; \quad \log_{\frac{3}{4}} x < 0,5.$$