

Proprietà dei logaritmi

Perché le proprietà dei logaritmi?

I logaritmi in molte leggi scientifiche

Troviamo i logaritmi in molte leggi scientifiche insieme ad altre operazioni.

Ecco un primo esempio:

La legge per misurare l'intensità della sensazione S prodotta da una sorgente sonora d'intensità P

$$S = 10 \log(10^{12} P)$$

Come si legge e si calcola un'espressione con i logaritmi, insieme con altre operazioni?

I logaritmi in molte leggi scientifiche

Ecco un altro esempio

Per risolvere problemi sul decadimento radioattivo abbiamo trovato la seguente formula

$$t = \log_{\frac{1}{2}} M$$

Come si calcola il logaritmo con una base diversa da 10?

Regole “di lettura”

A. Logaritmi e priorità delle operazioni

In un'espressione dove compaiono potenze (e radici), logaritmi, addizioni (e sottrazioni), moltiplicazioni (e divisioni) i calcoli si eseguono in questo ordine stabilito:

1. potenze, radici e logaritmi;
2. moltiplicazioni e divisioni;
3. addizioni e sottrazioni.

B. Si usano le parentesi per cambiare l'ordine stabilito

Esempi di regole “di lettura”

$$\underbrace{\log 10 \cdot 100 = 1 \cdot 100}_{\text{prima il logaritmo}} = 100$$

$$\underbrace{\log(10 \cdot 100) = \log 1000}_{\text{prima la parentesi}} = 3$$

$$\underbrace{\log 100 : 10 = 2 : 10}_{\text{prima il logaritmo}} = 0,2$$

$$\underbrace{\log(100 : 10) = \log 10}_{\text{prima la parentesi}} = 1$$

Scritture che richiedono attenzione

$$\log 10 \cdot 100 = 100 \log 10$$

$$\log 100 : 10 = \frac{\log 100}{10} = \log 100 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \log 100$$

$$\log(100 : 10) = \log \frac{100}{10}$$

$$\log 100 : \log 10 = \frac{\log 100}{\log 10}$$

**Presenti in
molti testi**

**Presente in
molti testi**

Dalle proprietà delle potenze alle proprietà dei logaritmi

Ricavo le proprietà dei logaritmi dalle proprietà delle potenze. Ecco come procedo.

Il logaritmo di una potenza

Proprietà delle potenze

Potenza di potenza

$$\left(a^m\right)^p = a^{m \cdot p}$$

Proprietà dei logaritmi

Logaritmo di una potenza	
Esempio numerico	In generale
$100 = 10^2 \Leftrightarrow \log 100 = 2$	$x = a^m \Leftrightarrow \log_a x = m$
$100^3 = 10^2 \cdot 3 \Leftrightarrow \log 100^3 = 2 \cdot 3$	$x^p = a^{mp} \Leftrightarrow \log_a x^p = mp$
$\log(100^3) = 3\log 100$	$\log_a (x^p) = p\log_a x$

Il logaritmo di un prodotto

Proprietà delle potenze
con la stessa base a

Prodotto di potenze

$$a^m \cdot a^p = a^{m+p}$$

Proprietà dei logaritmi

Logaritmo di un prodotto	
Esempio numerico	In generale
$100 = 10^2 \Leftrightarrow \log 100 = 2$	$x = a^m \Leftrightarrow \log_a x = m$
$1000 = 10^3 \Leftrightarrow \log 1000 = 3$	$y = a^p \Leftrightarrow \log_a y = p$
$100 \cdot 1000 = 10^{2+3} \Leftrightarrow \log (100 \cdot 1000) = 2 + 3$	$xy = a^{m+p} \Leftrightarrow \log_a (xy) = m + p$
$\log(100 \cdot 1000) = \log 100 + \log 1000$	$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

Il logaritmo di un quoziente

Proprietà delle potenze con la stessa base a

Quoziente di potenze

$$\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$$

Proprietà dei logaritmi

Logaritmo di un quoziente	
Esempio numerico	In generale
$1000 = 10^3 \Leftrightarrow \log 1000 = 3$	$x = a^m \Leftrightarrow \log_a x = m$
$100 = 10^2 \Leftrightarrow \log 100 = 2$	$y = a^p \Leftrightarrow \log_a y = p$
$1000 : 100 = 10^{3-2} \Leftrightarrow \log (1000 : 100) = 3 - 2$	$x : y = a^{m-p} \Leftrightarrow \log_a (x : y) = m - p$
$\log(100 : 1000) = \log 1000 - \log 100$	$\log_a (x : y) = \log_a x - \log_a y$

Cambiamento di base di un logaritmo

<i>Cambiamento di base</i>	
Esempio numerico <i>Calcolare un logaritmo in base 3, a partire dal logaritmo in base 10</i>	In generale <i>Calcolare un logaritmo in base c, a partire dal logaritmo in base b</i>
<i>def. logaritmo</i> $\log_3 14 = x$ $\Downarrow$ $14 = 3^x$ <i>log dei due membri</i> $\Downarrow$ $\log 14 = \log 3^x$ <i>logaritmo di potenza</i> $\Downarrow$ $\log 14 = x \log 3$ <i>esplicito x</i> $\Downarrow$ $x = \frac{\log 14}{\log 3}$ $\log_3 14 = \frac{\log 14}{\log 3}$	<i>def. logaritmo</i> $\log_c a = x$ $\Downarrow$ $a = c^x$ <i>log_b dei due membri</i> $\Downarrow$ $\log_b a = \log_b c^x$ <i>logaritmo di potenza</i> $\Downarrow$ $\log_b a = x \log_b c$ <i>esplicito x</i> $\Downarrow$ $x = \frac{\log_b a}{\log_b c}$ $\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$

Tutte le proprietà dei logaritmi

1. Logaritmo di una potenza

$$\log_b x^p = p \log_b x$$

2. Logaritmo di un prodotto

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$$

3. Logaritmo di un quoziente

$$\log_b(x : y) = \log_b x - \log_b y$$

4. Cambiamento dalla base b alla base c

$$\log_c x = \frac{\log_b x}{\log_b c}$$

Calcoli con i logaritmi

Oggi con la calcolatrice

L'importanza dei logaritmi è legata alla possibilità di risolvere numerosi problemi descritti da leggi esponenziali o logaritmiche nei campi più vari: fisica, astronomia, biologia, scienze della Terra, economia, psicologia, medicina, informatica, ...

Ma restano due punti importanti, origine di difficoltà:

- Come organizzare i calcoli con la calcolatrice?
- Come organizzare la 'traduzione' di un problema in funzioni esponenziali o logaritmiche?

Difficoltà dei calcoli con i logaritmi

I calcoli con i logaritmi richiedono una continua attenzione mentre si scrive e si calcola: bisogna applicare correttamente le proprietà e bisogna usare opportunamente la calcolatrice, ... non si può procedere automaticamente.

Ragioniamo su un esempio.

Attenzione nei calcoli con i logaritmi

Esempio: calcolare l'espressione $3\log\sqrt[3]{10}$

a. Calcoli con carta e penna

Applico la proprietà del logaritmo di potenza e ottengo:

$$3\log\sqrt[3]{10} = \log\left(\sqrt[3]{10}\right)^3 = \log 10 = 1$$

b. Calcoli **solo** con la calcolatrice

Piglio la sequenza di tasti



e ottengo: 1

La calcolatrice esegue i calcoli con tutte le cifre disponibili, perciò dà il risultato più preciso possibile.

Attenzione nei calcoli con i logaritmi

Un ultimo procedimento per calcolare l'espressione

$$3\log\sqrt[3]{10}$$

c. Calcoli svolti con la calcolatrice, ma con i risultati parziali arrotondati a due cifre e scritti a mano

$$\sqrt[3]{10} \cong 2,15 \quad \log 2,15 \cong 0,33 \quad 0,33 \times 3 = 0,99$$

Ottingo alla fine:

$$3\log\sqrt[3]{10} \cong 0,99$$

Procedimento decisamente sconsigliato!

- *Scrivere su carta i risultati parziali porta errori di scrittura.*
- *Con solo due cifre decimali generalmente non si ottiene una buona l'approssimazione.*

Problemi da risolvere con i logaritmi

Riprendo il problema di datazione

Problema di datazione

Da risolvere con la legge logaritmica

$$t = \log_{\frac{1}{2}} M = \log_{0,5} M$$



In una conchiglia viva trovo 1mg di C_{14}

Datazione

Oggi trovo la stessa conchiglia fossile, con 0,3 mg di C_{14} . Da quanto tempo è morta?

È data $M = 0,3$

Calcolo t

Cambiamento di base per eseguire i calcoli con il tascabile:

$$\log_{0,5} 0,3 = \frac{\log 0,3}{\log 0,5} \cong 1,74$$

La conchiglia è morta da circa 1,74 tempi di dimezzamento e cioè da:
 $1,74 \times 6000 = 10\ 440$ anni

$$t = \log_{0,5} 0,3$$

Problemi sui suoni

Problema basato su una legge logaritmica

Legge che dà la misura in decibel dell'intensità della sensazione prodotta da un suono.

S Intensità della
sensazione udita

$$S = 10 \log(10^{12} P)$$

P Potenza trasmessa
dall'onda sonora

Quesito a

- a. Al momento del decollo un aereo produce un'onda sonora che trasmette una potenza $P = 0,2 \text{ W/m}^2$; quanto vale in decibel la sensazione sonora corrispondente?

Traduzione in linguaggio matematico: *quanto vale S, se nella formula sostituisco 0,2 al posto di P?*

$$S = 10 \log(10^{12} \times 0,2)$$

Con la calcolatrice si ottiene $S \approx 113$

Problema descritto da una legge logaritmica

Legge che dà la misura in decibel dell'intensità della sensazione prodotta da un suono.

S Intensità della
sensazione udita

$$S = 10 \log(10^{12} P)$$

P Potenza trasmessa
dall'onda sonora

Quesito b

b. Un ragazzo suona in casa una chitarra elettrica che produce un suono intenso 60 decibel; quanto vale la potenza trasmessa dall'onda sonora?

Traduzione in linguaggio matematico: *quanto vale P, se nella formula sostituisco 60 al posto di S?*

$$60 = 10 \log(10^{12} P)$$

Nella formula debbo esplicitare P.

Procedimento per esplicitare P

$$60 = 10 \log(10^{12} P)$$

1. Divido per 10 i due membri per esplicitare il logaritmo, che è moltiplicato per 10; ottengo:

$$\log(10^{12} P) = 6$$

2. Applico la definizione di logaritmo per esplicitare l'argomento del logaritmo; ottengo:

$$10^{12} P = 10^6$$

3. Divido i due membri per 10^{12} per esplicitare P; ottengo:

$$P = 10^6 : 10^{12} = 10^{-6}$$

Ho ottenuto $P = 10^{-6} \text{ W/m}^2$ senza usare la calcolatrice: ho applicato la proprietà del quoziente di potenze con la stessa base.

Problema descritto da una legge logaritmica

Legge che dà la misura in decibel dell'intensità della sensazione prodotta da un suono.

S Intensità della
sensazione udita

$$S = 10 \log(10^{12} P)$$

P Potenza trasmessa
dall'onda sonora

Quesito c

- c. Si ha *la soglia di udibilità* quando vale 0 l'intensità della sensazione udita; quanto vale la corrispondente potenza?

Problema analogo al precedente: *quanto vale P, se nella formula sostituisco 0 al posto di S?*

$$0 = 10 \log(10^{12} P)$$

Nella formula debbo di nuovo esplicitare P

Procedimento per esplicitare P

$$0 = 10 \log(10^{12} P)$$

1. Divido per 10 i due membri per esplicitare il logaritmo, che è moltiplicato per 10; ottengo:

$$\log(10^{12} P) = 0$$

2. Applico la definizione di logaritmo per esplicitare l'argomento del logaritmo; ottengo:

$$10^{12} P = 10^0$$

3. Divido i due membri per 10^{12} per esplicitare P; ottengo:

$$P = 10^0 : 10^{12} = 10^{-12}$$

La soglia di udibilità corrisponde ad una potenza trasmessa $P = 10^{-12} \text{ W/m}^2$

Osservazioni sulla scala in decibel (dB)

Intensità della sensazione in db S	Potenza trasmessa dall'onda sonora in W/m ² P
0	10^{-12}
60	$10^6 10^{-12}$

+60

× 1000 000

