Grafici di funzioni composte

Grafici di funzioni composte tracciati con simmetrie

Data una funzione composta individuo le funzioni componenti

Ecco due esempi

$y = \ln(-x)$ funzione composta da $z = -x$ con $y = \ln(z)$

$y = -\ln(x)$ funzione composta da $z = \ln(x)$ con $y = -z$

Ecco come posso ragionare

Disegno y = ln(−x) con simmetrie

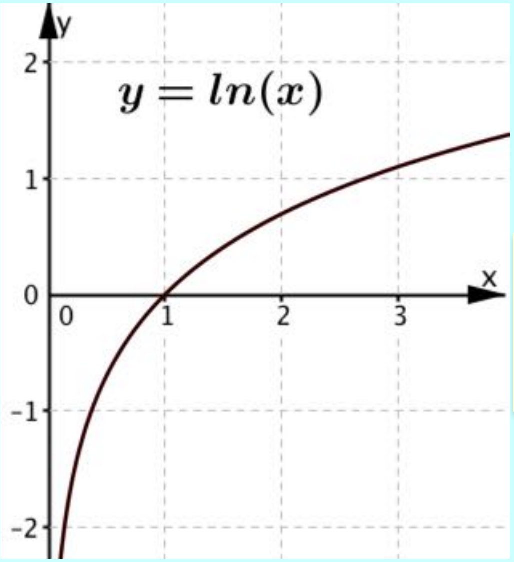
Per tracciare con simmetrie il grafico di $y = \ln(-x)$:

a. *Considero la funzione come trasformata di* $y = \ln(x)$,
perciò indico le lettere con apici e scrivo $y' = \ln(-x')$

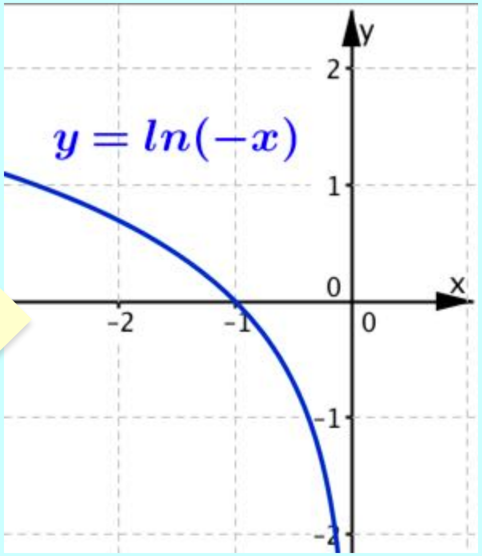
b. *Confronto* $\boxed{\begin{array}{l} y = \ln x \\ y' = \ln(-x') \end{array}}$

$$\begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Simmetria rispetto all'asse y che cambia segno alle ascisse



Ribalto attorno all'asse y



Disegno y = –ln(x) con simmetrie

Per tracciare con simmetrie il grafico di $y = -\ln(x)$:

a. *Considero la funzione come trasformata di* $y = \ln(x)$, *perciò indico le lettere con apici e scrivo* $y' = -\ln(x')$

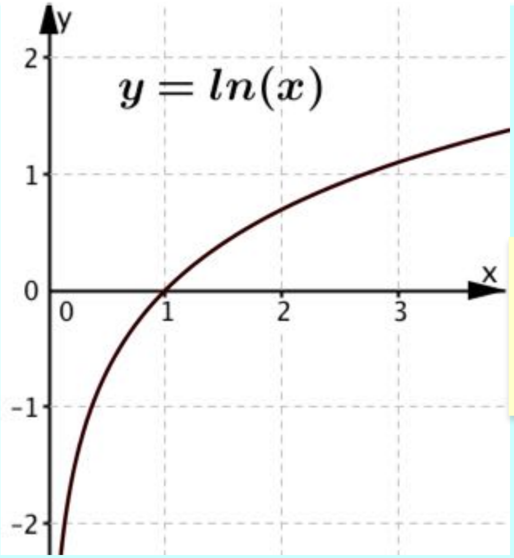
b. *Per confrontare le funzioni esplicito* $\ln(x')$ *e ottengo* $-y' = \ln(x')$

c. *Confronto*

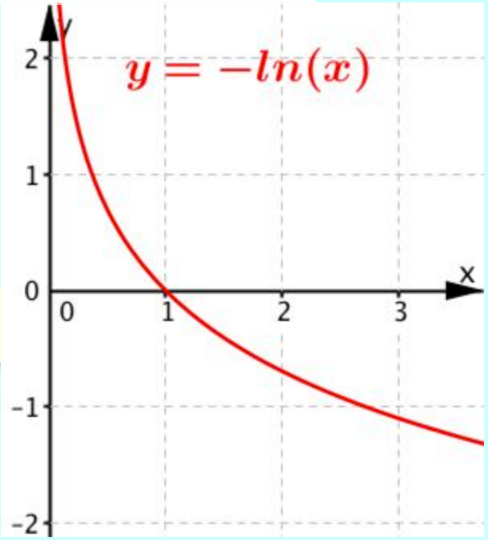
$$\boxed{\begin{matrix} y = \ln x \\ -y' = \ln(x') \end{matrix}}$$

$$\begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

Simmetria rispetto all'asse x che cambia segno alle ordinate



Ribalto attorno all'asse x



Daniela Valenti, 2020

Grafici di funzioni composte con modulo

Data una funzione composta individuare le funzioni componenti

Primi due esempi

$y = \ln|x|$ funzione composta da $z = |x|$ con $y = \ln(z)$

$y = |\ln(x)|$ funzione composta da $z = \ln(x)$ con $y = |z|$

Per tracciare i grafici mi baso:
- sulla funzione modulo definita per casi;
- sulla simmetria rispetto all'asse *x* o all'asse *y*.
Vediamo come procedo.

Disegno y = ln|x| con funzione definita per casi

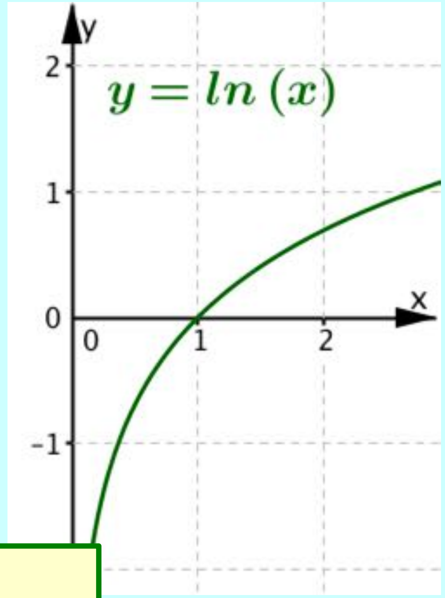
Per tracciare con funzione definita per casi il grafico di $y = \ln|x|$:

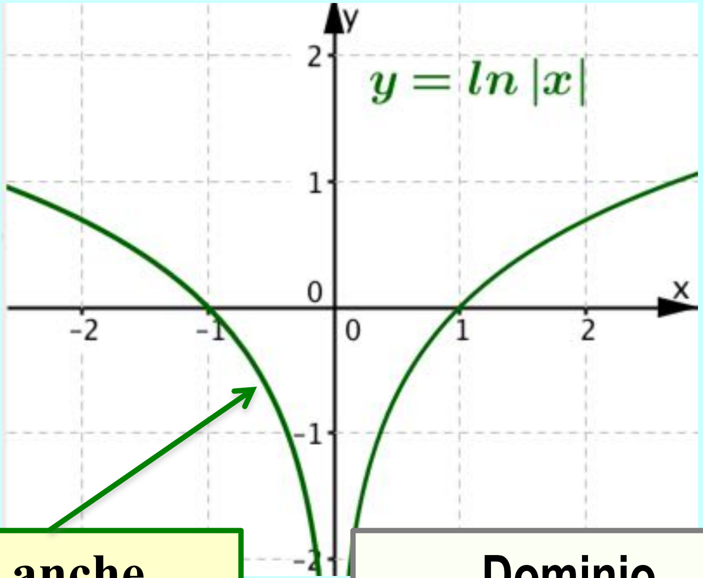
a. Osservo che la funzione è composta da z = |x| con y = ln(z)

b. Ricordo che $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

c. Ricordo che il dominio di ln(z) è z > 0

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln(x), & \text{se } x > 0 \\ \ln(-x), & \text{se } x < 0 \end{cases}$$





1. Disegno $\ln(x)$, se $x > 0$

2. Disegno anche $\ln(-x)$, se $x < 0$ con ribaltamento attorno all'asse *y*

Dominio
i numeri reali x ≠ 0

Daniela Valenti, 2020

Disegno y = |ln(x)| con funzione definita per casi

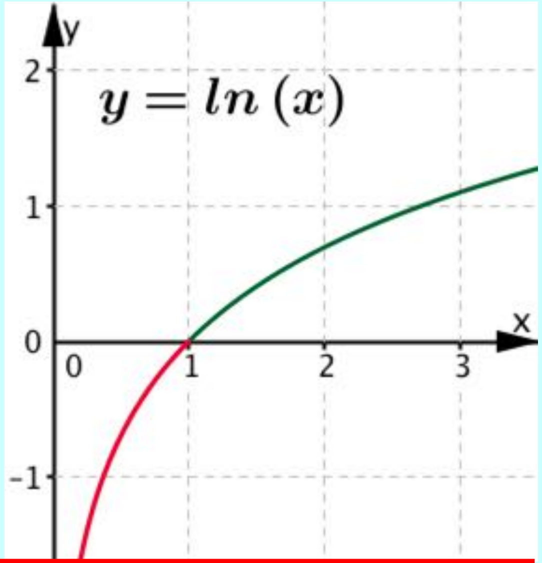
Per tracciare con funzione definita per casi il grafico di $y = |\ln(x)|$:

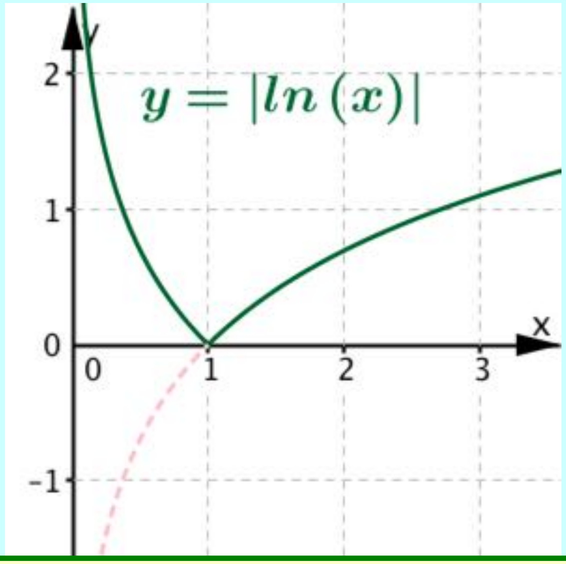
a. Osservo che la funzione è composta da $z = \ln(x)$ con $y = |z|$

b. Ricordo che dominio di $\ln(x)$ è $x > 0$

c. Ricordo che $|z| = \begin{cases} z, & \text{se } z \geq 0 \\ -z, & \text{se } z < 0 \end{cases}$

$$|\ln(x)| = \begin{cases} \ln(x), & \text{se } \ln(x) \geq 0 \\ -\ln(x), & \text{se } \ln(x) < 0 \end{cases}$$





1. Disegno $\ln(x)$ nel dominio $x > 0$
2. Coloro in rosso l'arco sotto l'asse x, per cui risulta $\ln(x) < 0$.

3. Ribalto l'arco rosso intorno all'asse x per disegnare $-\ln(x)$, se $\ln(x) < 0$

Proprietà dei logaritmi e funzioni composte

Proprietà dei logaritmi

Per i logaritmi naturali di numeri reali, sai che vale la seguente proprietà:

$$\ln\left(b^n\right) = n\ln(b), \text{ solo se } b > 0$$

Logaritmo di una potenza

Esempi

$$\ln(3^2) = 2\ln(3) \quad \text{e} \quad \ln(2^3) = 3\ln(2)$$

Come si estende questa proprietà alle funzioni?

Esempi

$$y = \ln(x^2) \quad \text{e} \quad y = \ln(x^3)$$

Funzione composta e proprietà dei logaritmi

x	$z = x^2$	$y = \ln\left(x^2\right)$
-3	$(-3)^2 = 3^2$	$\ln\left(3^2\right) = 2\ln(3)$
-1	$(-1)^2 = 1^2$	$\ln\left(1^2\right) = 2\ln(1)$
0	$0^2 = 0$	$\ln(0)$ non esiste
1	1^2	$\ln\left(1^2\right) = 2\ln(1)$
3	3^2	$\ln\left(3^2\right) = 2\ln(3)$

$$y = \begin{cases} 2\ln(x), \text{ se } x > 0 \\ 2\ln(-x), \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

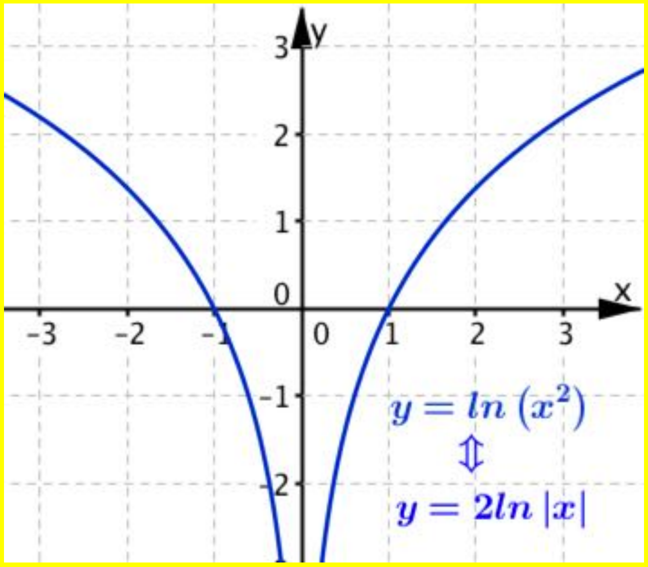
$$\Updownarrow$$

$$y = 2\ln|x|$$

con dominio i numeri reali $x \neq 0$

Conclusione

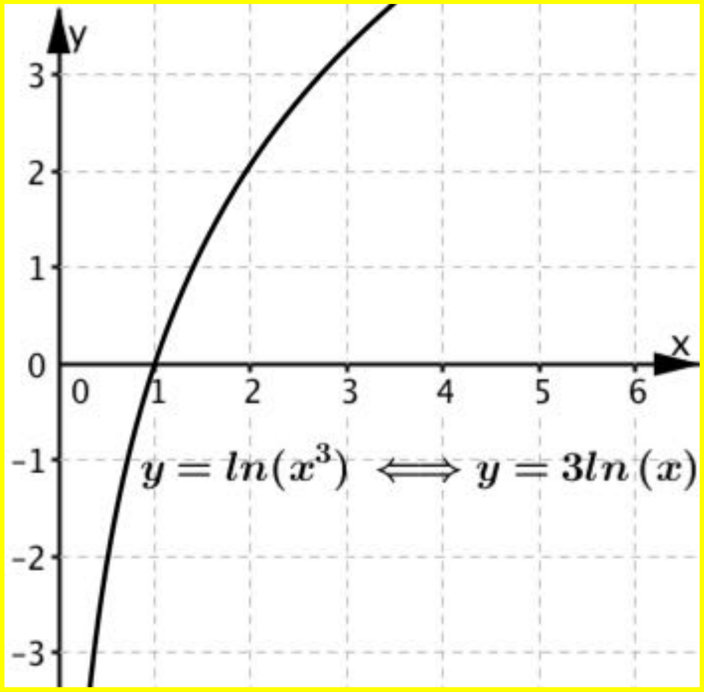
$$y = \ln\left(x^2\right) \Leftrightarrow y = 2\ln|x| \text{ con dominio } x \neq 0$$



Daniela Valenti, 2020

Funzione composta e proprietà dei logaritmi

x	$z = x^3$	$y = \ln(x^3)$
-2	$(-2)^3 = -8$	$\ln(-8)$ non esiste
-1	$(-1)^3 = -1$	$\ln(-1)$ non esiste
0	$0^3 = 0$	$\ln(0)$ non esiste
1	1^3	$\ln(1^3) = 3\ln(1)$
3	2^3	$\ln(2^3) = 3\ln(2)$



Conclusione

$$y = \ln(x^3) \Leftrightarrow y = 3\ln(x) \text{ con dominio } x > 0$$

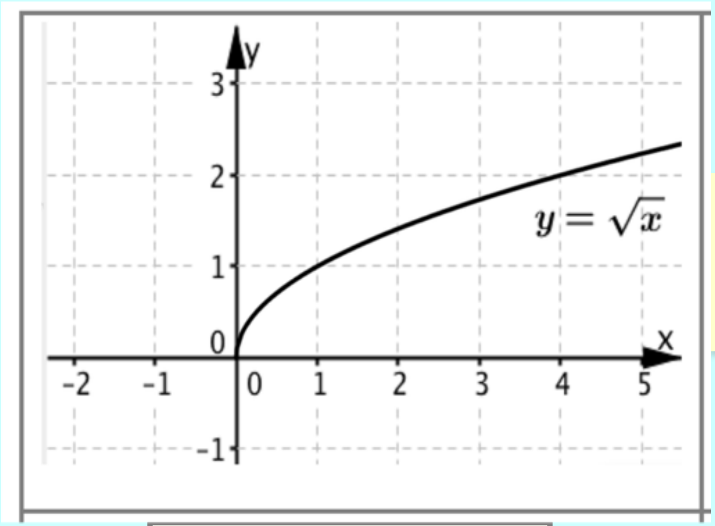
Attività

Completa la scheda di lavoro per tracciare il grafico di altre funzioni composte.

Che cosa hai ottenuto?

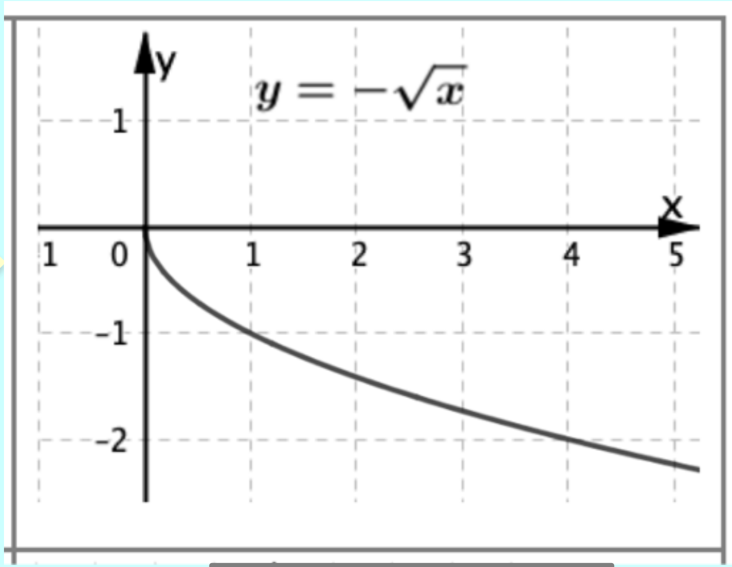
Problema 1

1. In figura 1 trovi il grafico di $y=\sqrt{x}$. Disegna il grafico di $y=-\sqrt{x}$



Il dominio è $x \geq 0$

Ribalto attorno all’asse x

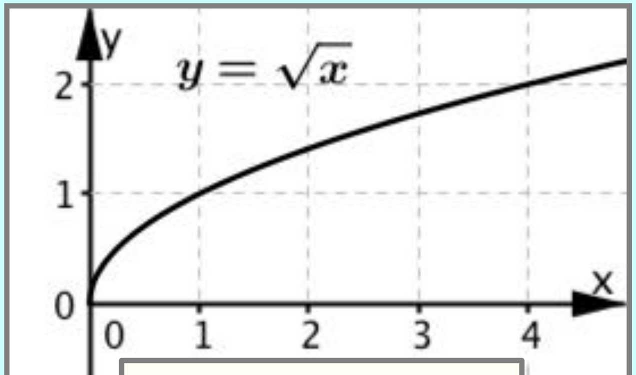


Il dominio è $x \geq 0$

Problema 1

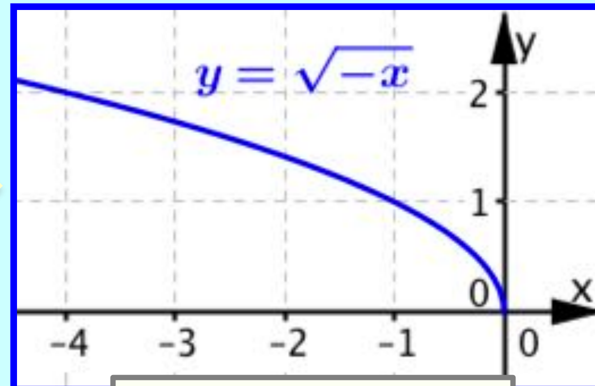
. Disegna il grafico delle seguenti funzioni

$y = \sqrt{-x}$, $y = \sqrt{|x|}$

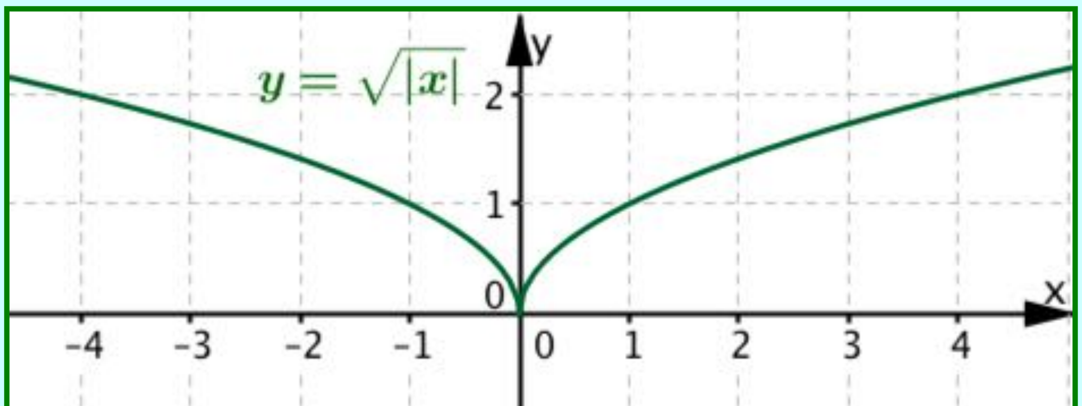


Il dominio è $x \geq 0$

Ribalto attorno all'asse y



Il dominio è $x \leq 0$



Il dominio è l'insieme R dei numeri reali

$$y = \sqrt{|x|}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{x}, & \text{se } x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Problema 1

b. Spiega come tracci il grafico di $y = \left|\sqrt{x}\right|$

$y = \left|\sqrt{x}\right|$ e $y = \sqrt{x}$ hanno lo stesso grafico

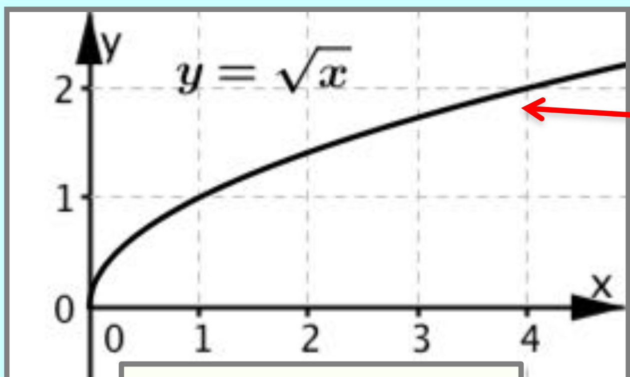
Ecco perché

$y = \left|\sqrt{x}\right|$ è composta di $z = \sqrt{x}$ con $y = |z|$

Perciò trovo

$$y = \left|\sqrt{x}\right| \Leftrightarrow y = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{se } \sqrt{x} \geq 0 \\ -\sqrt{x}, & \text{se } \sqrt{x} < 0 \end{cases}$$

e, per qualunque $x \geq 0$, risulta $\sqrt{x} \geq 0$



Il dominio è $x \geq 0$

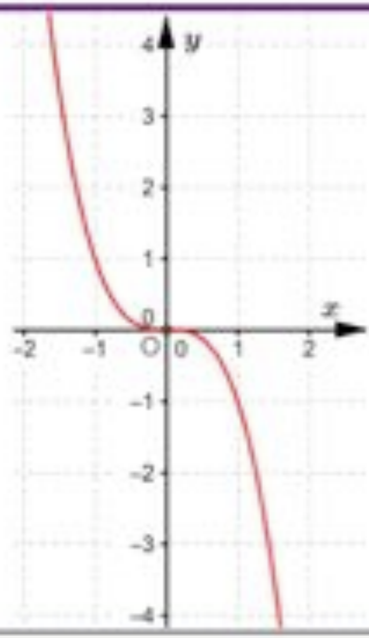
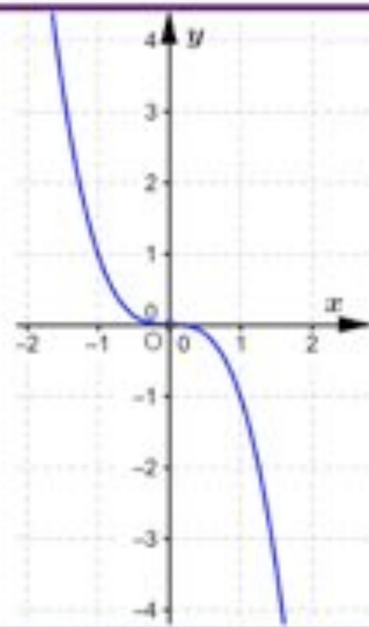
Il grafico si trova al di sopra dell'asse x in tutto il dominio della funzione.

Problema 2

a. **Ricorda che cosa vuol dire la frase:**

‘y=sin(x) è una funzione dispari’

$y = x^3$ funzione dispari

Grafico		
Funzione	$-y = x^3 \Leftrightarrow y = -x^3$	$y = (-x)^3 \Leftrightarrow y = -x^3$
Tabella	vedi sotto	vedi sotto

x	$y = -x^3$
-1,5	$-(-1{,}5)^3 \approx -(-3{,}4) = 3{,}4$
-1	$-(-1)^3 = -(-1) = 1$
0	$0^3 = 0$
1	$-1^3 = -1$
1,5	$-1{,}5^3 \approx -3{,}4$

x	$y = (-x)^3$
-1,5	$1{,}5^3 \approx 3{,}4$
-1	$1^3 = 1$
0	$0^3 = 0$
1	$(-1)^3 = -1$
1,5	$(-1{,}5)^3 \approx -3{,}4$

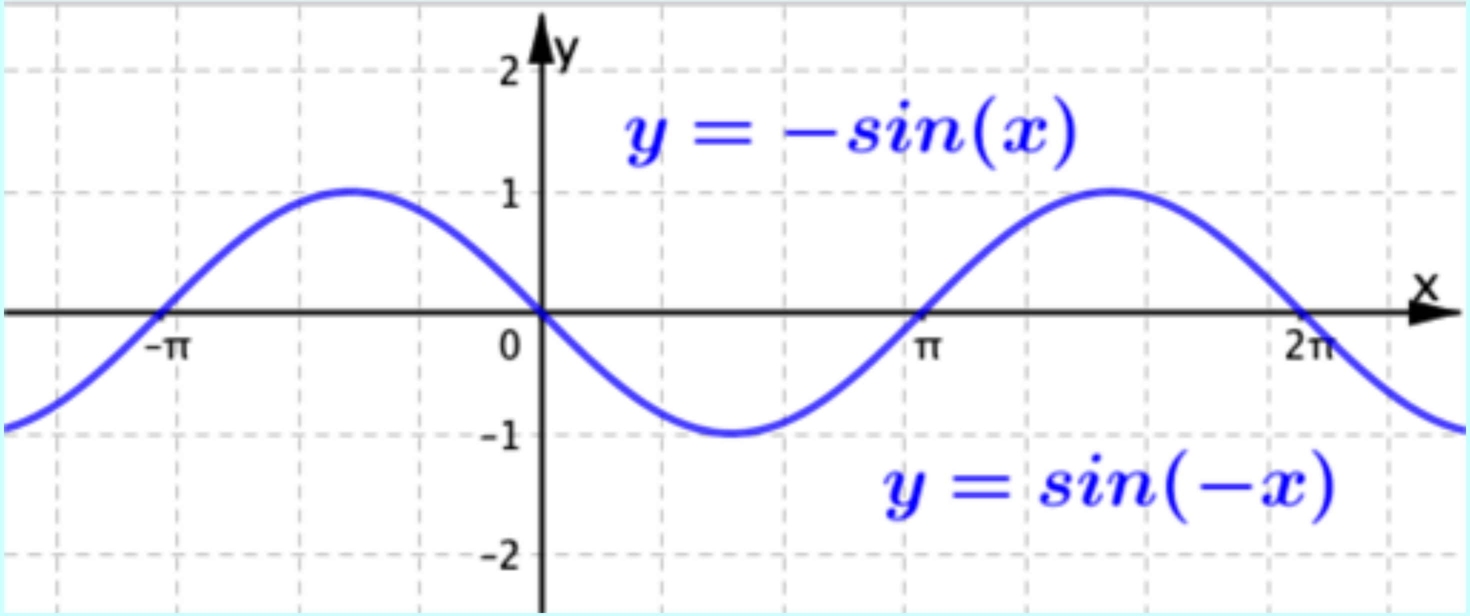
Curva simmetrica rispetto ad asse *x* coincide con curva simmetrica rispetto ad asse *y*

Funzione dispari

Il nome *'funzione dispari'* è legato al fatto che x^3 è una potenza di *x* con esponente dispari.

Daniela Valenti, 2020

$y = \sin(x)$ funzione dispari

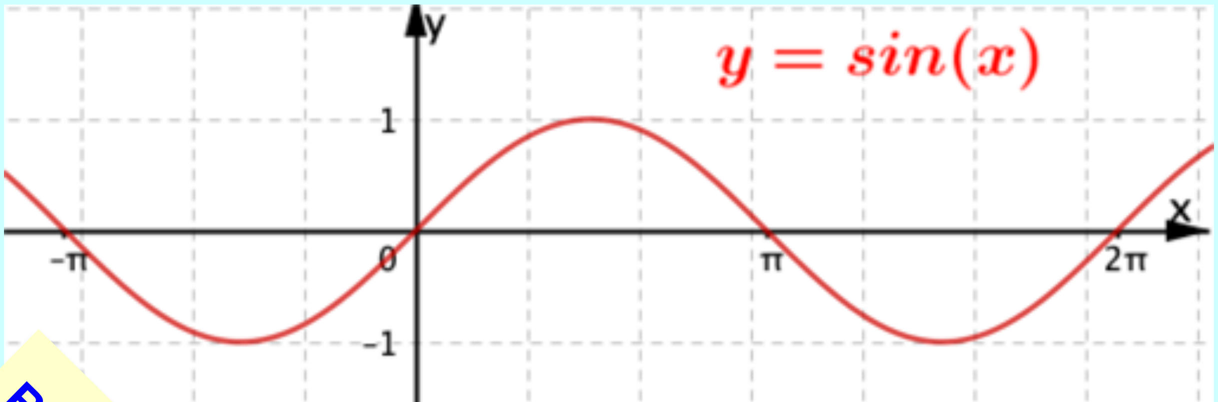


La curva simmetrica rispetto ad asse x coincide con la curva simmetrica rispetto ad asse y

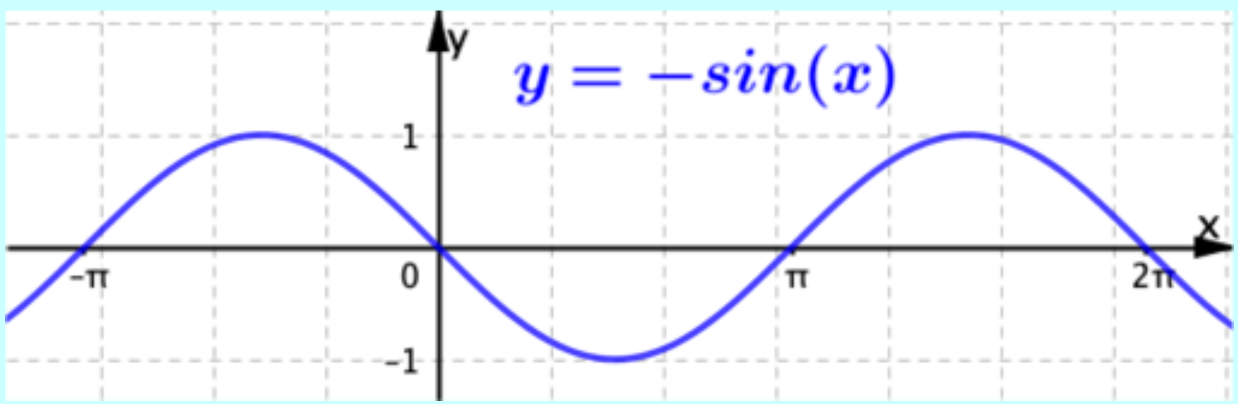
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

Problema 2

Grafico di $y = \sin(x)|$, $y = -\sin(x)$, $y = |\sin(x)|$

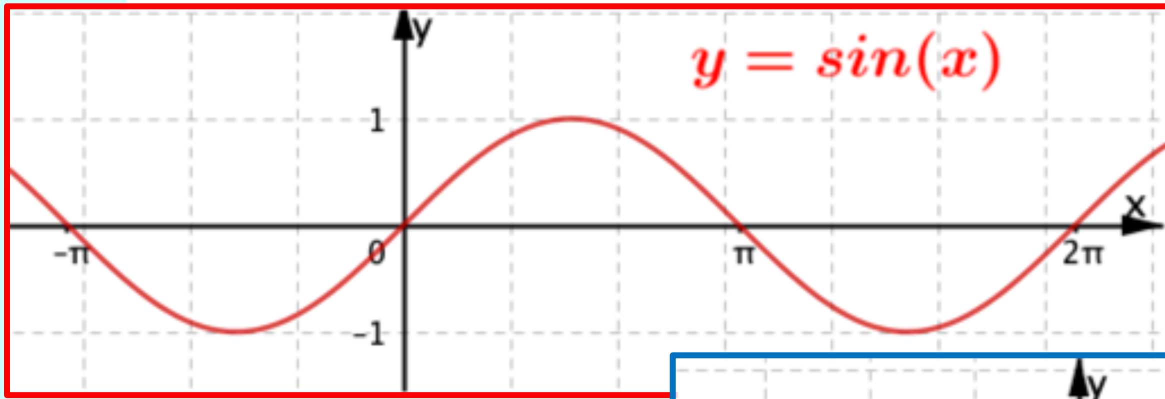


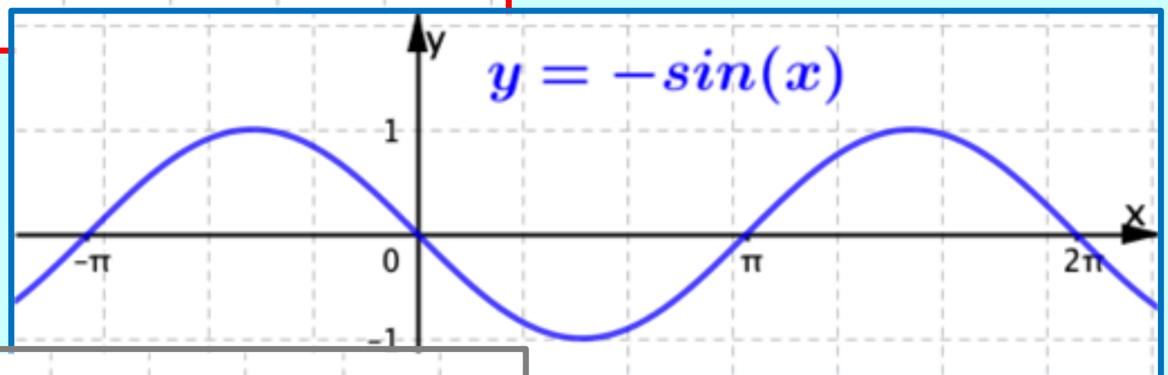
Ribalto attorno all'asse x

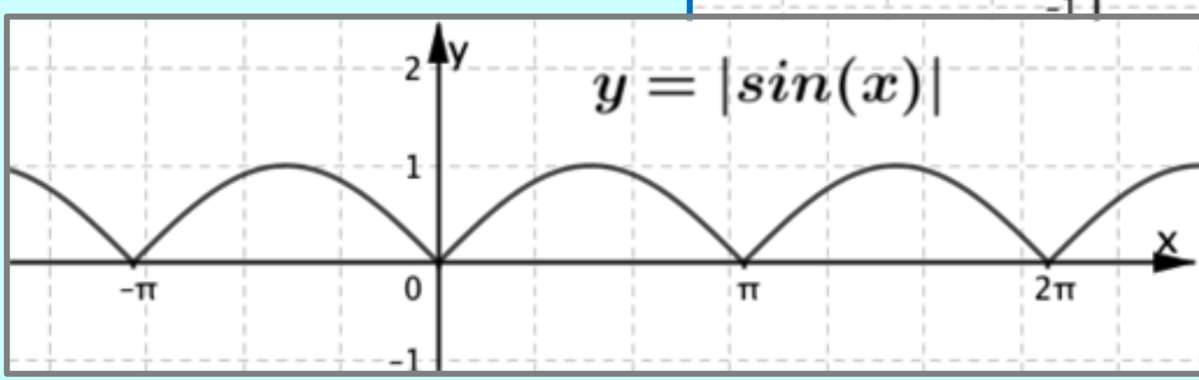


Problema 2

Grafico di $y = \sin(x)|$, $y = -\sin(x)$, $y = |\sin(x)|$







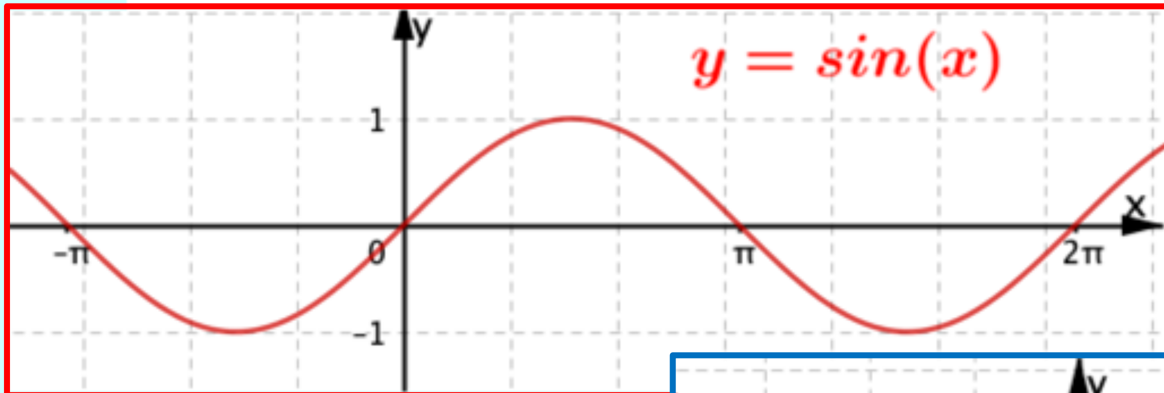
$$y = |\sin(x)|$$

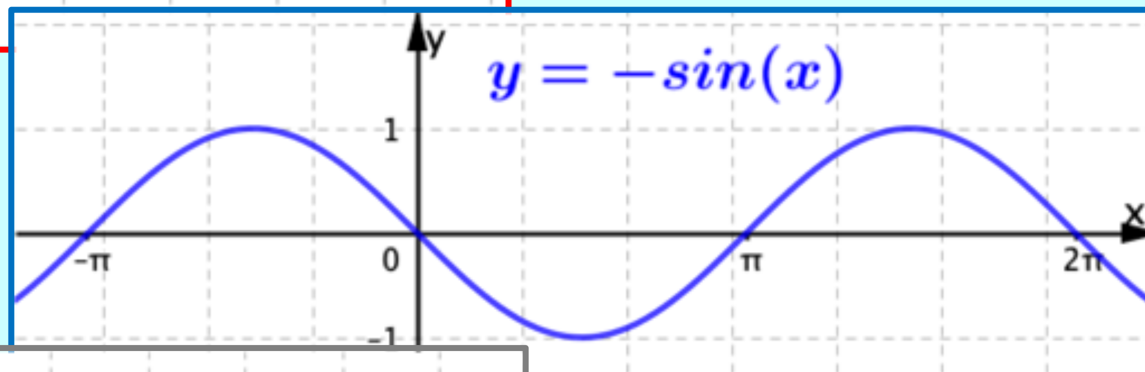
$$\Updownarrow$$

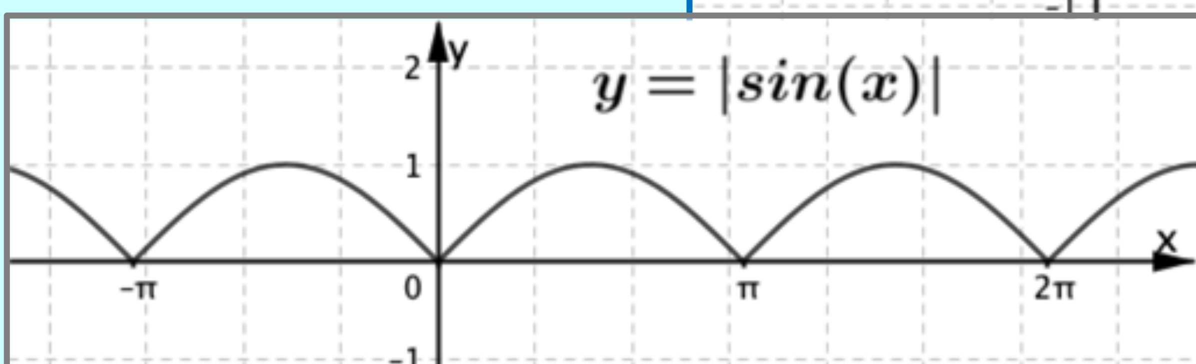
$$y = \begin{cases} -\sin(x), & \sin(x) < 0 \\ \sin(x), & \sin(x) \geq 0 \end{cases}$$

Problema 2

Grafico di $y = \sin(x)|$, $y = -\sin(x)$, $y = |\sin(x)|$







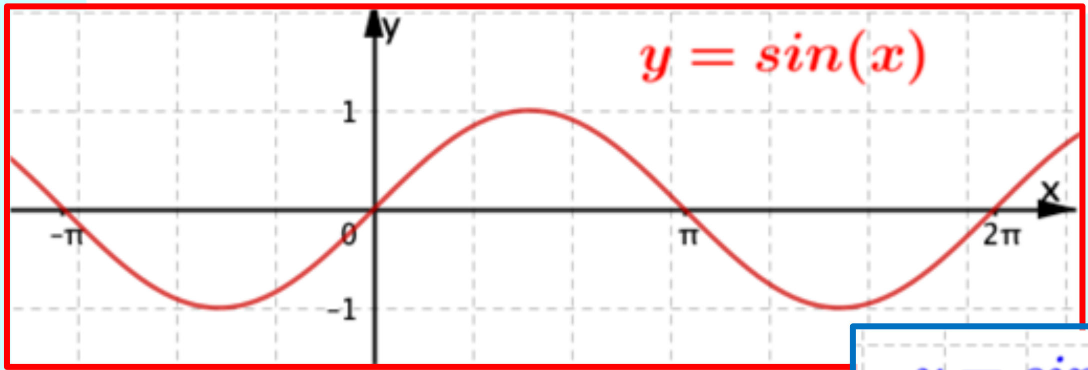
$$y = |\sin(x)|$$

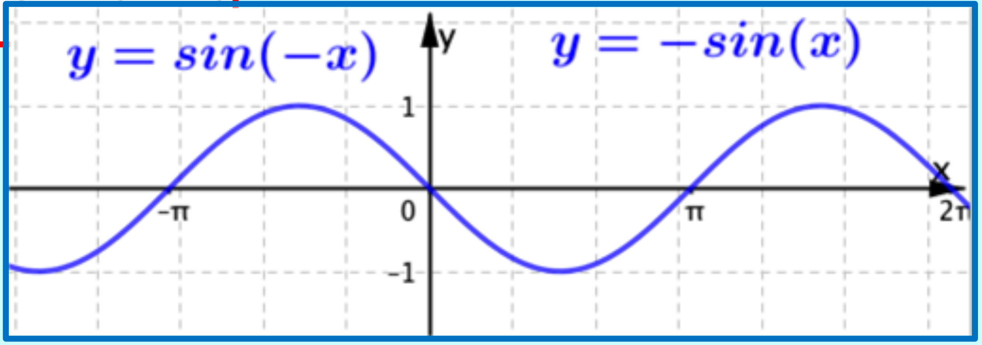
$$\Updownarrow$$

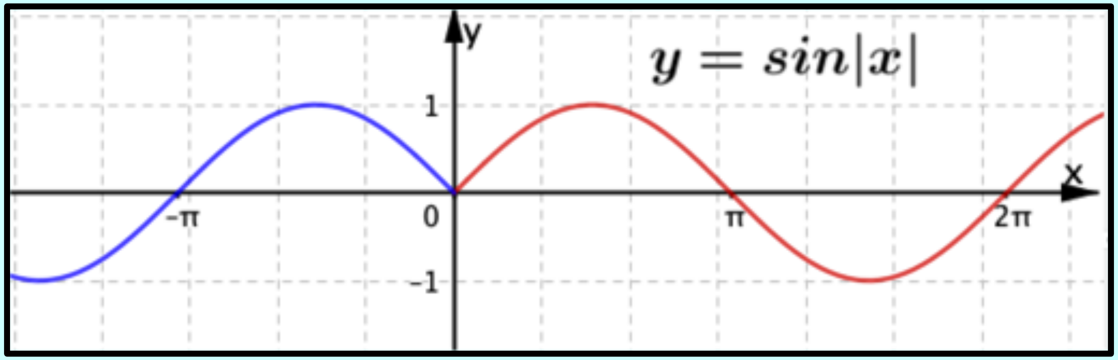
$$y = \begin{cases} -\sin(x), & \sin(x) < 0 \\ \sin(x), & \sin(x) \geq 0 \end{cases}$$

Problema 2

Grafico di $y = \sin(x)$, $y = \sin(-x)$, $y = \sin|x|$







$$y = \sin|x|$$
$$\Updownarrow$$
$$y = \begin{cases} \sin(-x), x < 0 \\ \sin(x), \quad x \geq 0 \end{cases}$$

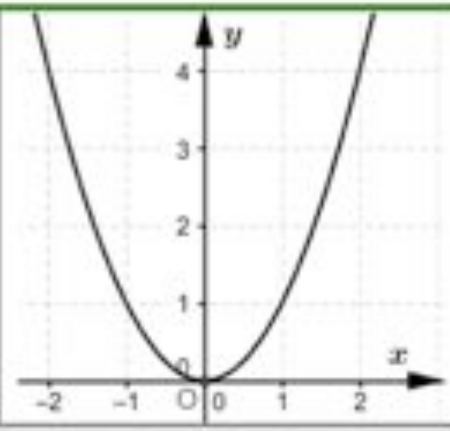
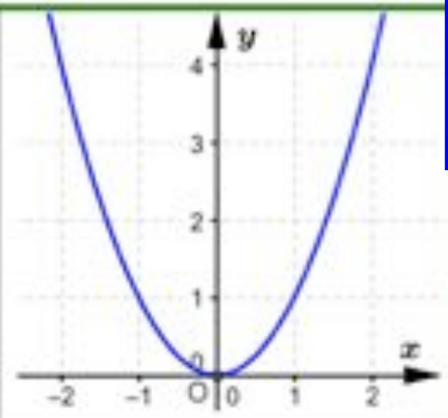
Daniela Valenti, 2020

Le funzioni pari

Riprendo anche le funzioni pari

Daniela Valenti, 2020

Funzioni pari

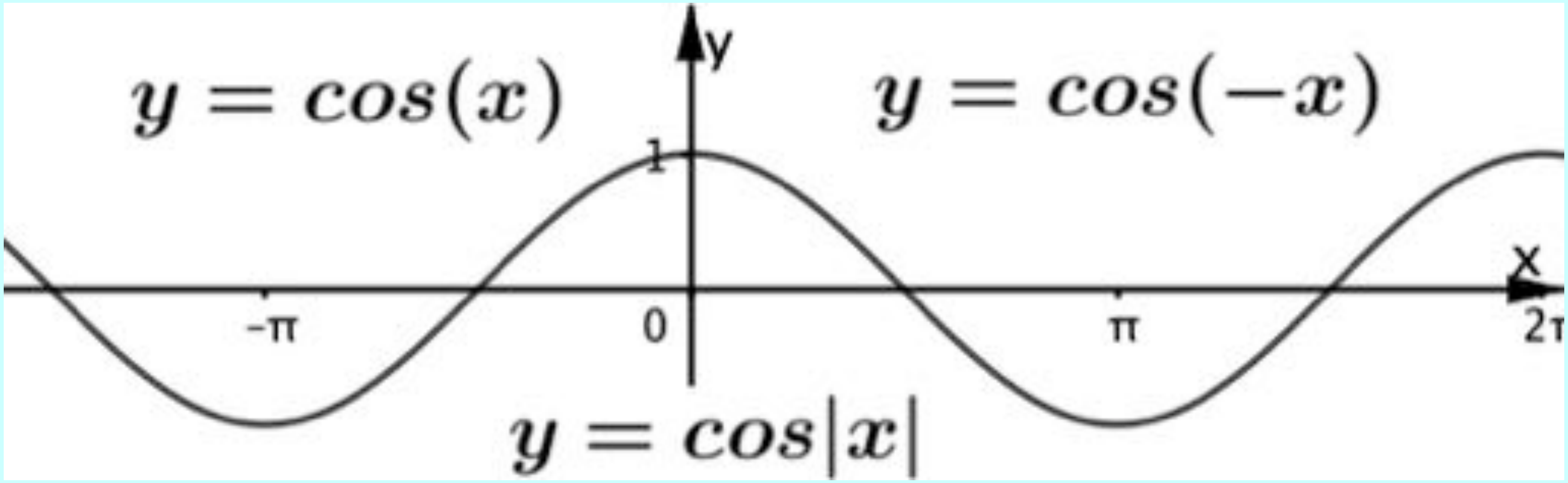
<table>
<tr><td>Grafico</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Funzione</td><td>$y = x^2$</td><td>$y = (-x)^2 \Leftrightarrow y = x^2$</td></tr>
<tr><td>Tabella</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>$y = x^2$</th></tr>
<tr><td>-2</td><td>$(-2)^2 = 4$</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>$(-1)^2 = 1$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$0^2 = 0$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$1^2 = 1$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$2^2 = 4$</td></tr>
</table>
</td><td>
<table>
<tr><th>x</th><th>$y = (-x)^2$</th></tr>
<tr><td>-2</td><td>$[-(-2)]^2 = 2^2 = 4$</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>$[-(-1)]^2 = 1^2 = 1$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>$0^2 = 0$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$(-1)^2 = 1$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$(-2)^2 = 4$</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Curva simmetrica rispetto all'asse *y*

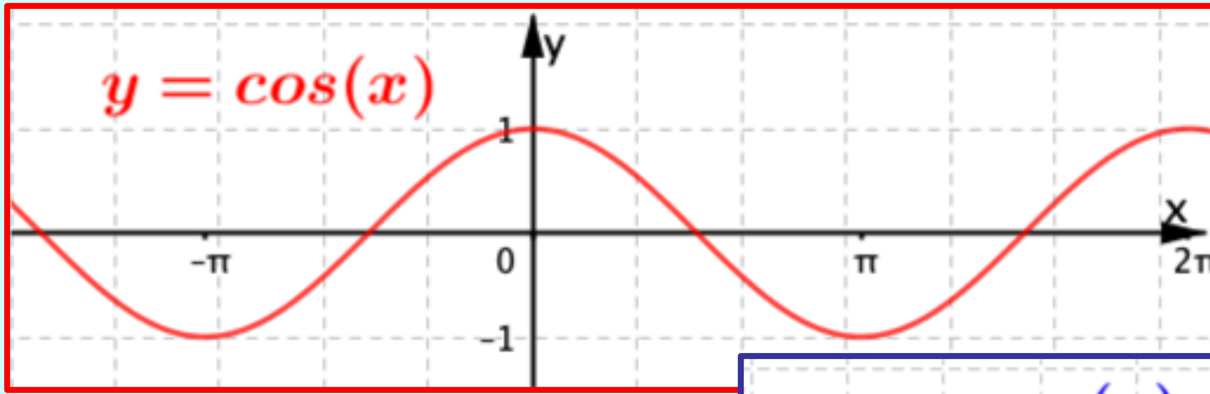
Funzione pari

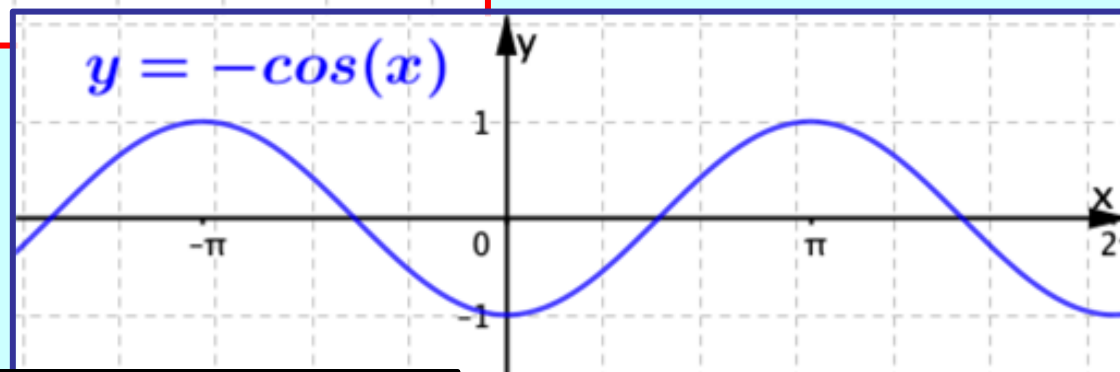
Il nome *'funzione pari'* è legato al fatto che x^2 è una potenza di *x* con esponente pari.

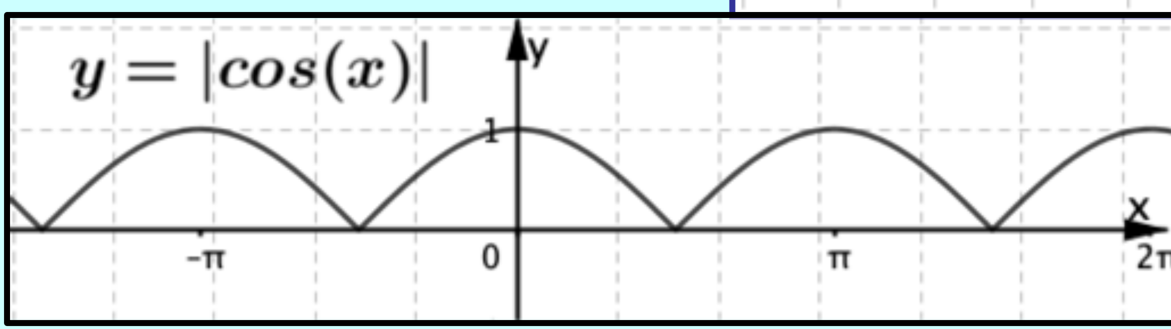
y = cos(x) è una funzione pari



Disegnare y = |cos(x)|







$$y = |\cos(x)|$$

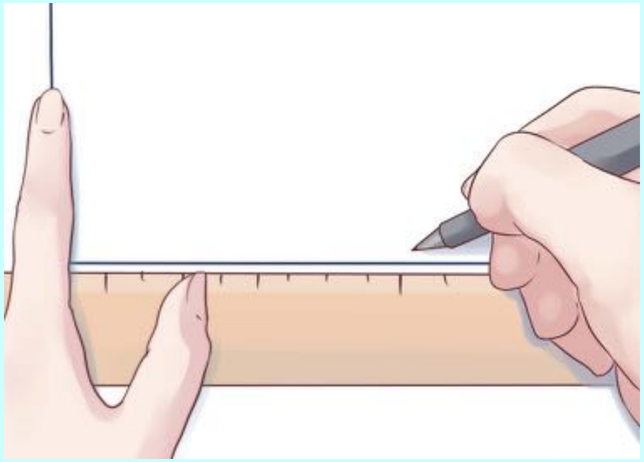
$$\Updownarrow$$

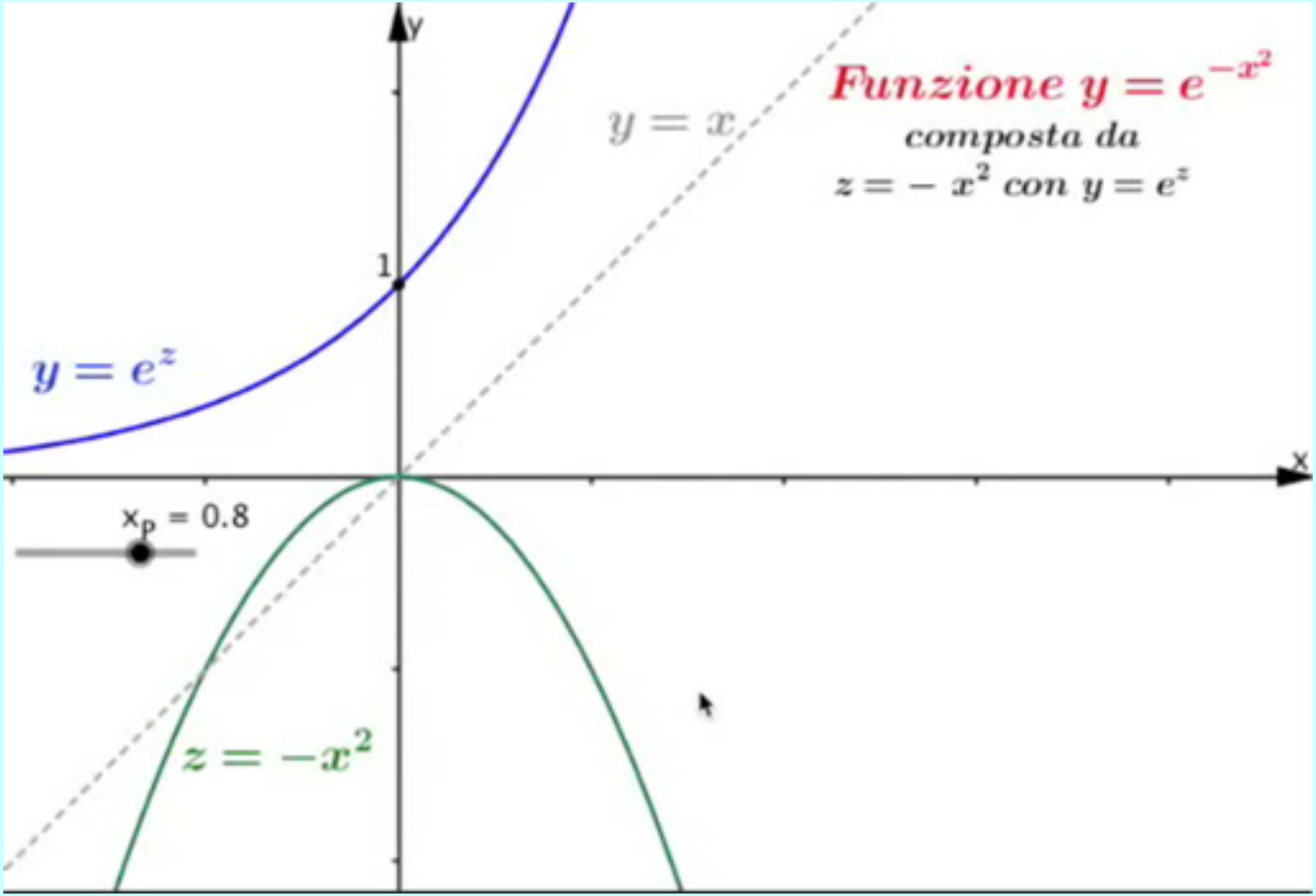
$$y = \begin{cases} -\cos(x), & \cos(x) < 0 \\ \cos(x), & \cos(x) \geq 0 \end{cases}$$

Un procedimento ‘storico’ per tracciare il grafico di funzioni composte

Fino agli anni ‘80 del secolo scorso, non erano diffusi personal computer e calcolatrici grafiche. Perciò si usavano vari metodi per tracciare ‘a mano’ il grafico di funzioni composte.

Il video seguente illustra, a partire da un esempio, un procedimento all’epoca spesso utilizzato.




y
1
x
$y = x$
Funzione $y = e^{-x^2}$
composta da
$z = -x^2$ con $y = e^z$
$y = e^z$
$x_P = 0.8$
$z = -x^2$